

B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Dans tout le problème, on considère des espaces vectoriels réels. L'espace des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes sera noté $\mathcal{M}(n, p)$. Le symbole T en exposant d'une matrice signifie que l'on considère sa transposée.

Pour $M \in \mathcal{M}(n, p)$ et $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, M_{ij} ou $(M)_{ij}$ est le coefficient de M situé sur la ligne i et la colonne j . On a donc $(M^T)_{ij} = M_{ji}$.

De même pour un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$, V^T est un vecteur ligne et V_i ou $(V)_i$ est sa $i^{\text{ème}}$ composante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathcal{M}(n, n)$ est la matrice identité de \mathbb{R}^n : $(I_n)_{ii} = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ et $(I_n)_{ij} = 0$, pour $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, on pourra omettre l'indice n et écrire I à la place de I_n .

On identifiera les endomorphismes de \mathbb{R}^n et la matrice qui leur est associée dans la base canonique. On appelle valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$ un nombre complexe λ tel que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible. On désigne par $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A . On rappelle que si N est une norme quelconque sur \mathbb{R}^n et \mathcal{N} est la norme matricielle associée :

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n, N(x)=1\}} N(Ax), \quad A \in \mathcal{M}(n, n),$$

alors on a

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{N}(A^n))^{1/n}. \quad (1)$$

On utilisera la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n , elle est définie par

$$\|V\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n (V_i)^2 \right)^{1/2}, \quad V \in \mathbb{R}^n.$$

La norme matricielle qui lui est associée est encore notée $\|\cdot\|$.

Pour V^1, \dots, V^k dans \mathbb{R}^n , on note $Vect(V^1, \dots, V^k)$ le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par V^1, \dots, V^k .

Dans ce problème, on introduit et étudie une méthode rapide permettant d'inverser le système linéaire issu de la discrétisation du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + 2\sigma u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On sait qu'il existe une unique solution et qu'elle est de classe C^2 sur $[0, 1]$.

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, on introduit le pas de discrétisation $h_l = 2^{-(l+1)}$ et le schéma aux différences finies

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h_l^2} + 2\sigma u_i = f_i, & i = 1, \dots, n_l, \\ u_0 = u_{n_l+1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $f_i = f(ih_l)$ et $n_l = 2^{l+1} - 1$.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{M}(n, n)$ telle qu'il existe $P \in \mathcal{M}(n, n)$ inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}(n, n)$ telle que

$$A = PBP^{-1}$$

et B est diagonale bloc, c'est à dire qu'il existe $0 = p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1} = n$ tels que $B_{ij} = 0$ s'il existe $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que (i, j) vérifie

$$p_l + 1 \leq i \leq p_{l+1} \text{ et } j \leq p_l$$

ou

$$p_l + 1 \leq i \leq p_{l+1} \text{ et } j \geq p_{l+1} + 1.$$

On définit les sous matrices $B_l \in \mathcal{M}(p_{l+1} - p_l, p_{l+1} - p_l)$, $l = 1, \dots, k$ par

$$(B_l)_{ij} = B_{p_l+i, p_l+j}, \quad 1 \leq i, j \leq p_{l+1} - p_l.$$

Montrer que

$$\rho(A) = \max_{l=1, \dots, k} \rho(B_l)$$

et que si de plus $P^{-1} = P^T$ alors

$$\|A\| = \max_{l=1, \dots, k} \|B_l\|$$

2. Montrer que pour $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(n, n)$

$$\rho(A_1 A_2) = \rho(A_2 A_1).$$

(On pourra utiliser (1)).

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}(n, n)$ est une matrice symétrique alors

$$\rho(A) = \|A\|.$$

4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}(n, n)$ alors

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}(n, n)$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire $Ax = b$ la donnée d'une application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et de la relation de récurrence $X^{n+1} = \Phi(X^n, b)$. Sous certaines conditions, après avoir choisi X^0 dans \mathbb{R}^n , on obtient une approximation de $A^{-1}b$ grâce à la suite d'itérés $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Montrer qu'à toute méthode itérative Φ on peut associer un unique couple de matrices M, N dans $\mathcal{M}(n, n)$ tel que pour tout $X, b \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$\Phi(X, b) = MX + Nb.$$

On appelle M la matrice d'itération de la méthode et N la matrice auxiliaire.

b. Montrer que la suite d'itérés $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A^{-1}b$ pour tout b et pour tout choix de X^0 si et seulement si $\rho(M) < 1$ et $N = (I - M)A^{-1}$.

On dira que la méthode est convergente si $\rho(M) < 1$ et $N = (I - M)A^{-1}$. On appelle $\rho(M)$ le taux de convergence de la méthode.

Partie II

1. Ecrire (3) sous la forme matricielle

$$A_{\sigma,l}U_l = F_l$$

où $U_l = (u_1, \dots, u_{n_l})^T$, $F_l = (f_1, \dots, f_{n_l})^T$ et $A_{\sigma,l}$ est une matrice que l'on précisera.

2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $A_{\sigma,l}$. On notera les vecteurs propres V_l^k , $k = 1, \dots, n_l$ et on les cherchera sous la forme $(V_l^k)_j = \sin(j \frac{k\pi}{n_l+1})$, $j = 1, \dots, n_l$.

3. Montrer que $(V_l^1, \dots, V_l^{n_l})$ forme une base orthogonale. Calculer la norme de ces vecteurs.

4. Montrer que pour tout $l \geq 1$ et $\sigma \geq 0$, $A_{\sigma,l}$ est inversible et

$$\|A_{\sigma,l}^{-1}\| \leq \frac{1}{4 + 2\sigma}.$$

On introduit la méthode itérative $\Phi_{\sigma,J,l}$, dite de Jacobi relaxée, de matrice d'itération $M_{\sigma,J,l}$ et de matrice auxiliaire $N_{\sigma,J,l}$ données par

$$M_{\sigma,J,l} = (1 - \omega)I - \frac{\omega}{2(1 + \sigma h_l^2)}(L + L^T),$$

$$N_{\sigma,J,l} = \frac{\omega h_l^2}{2(1 + \sigma h_l^2)}I$$

où L est donnée par

$$(L)_{ij} = -1, \quad i = 2, \dots, n_l, \quad j = i - 1,$$

$$(L)_{ij} = 0, \quad j \neq i - 1,$$

et $\omega \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que pour tout $\omega \in]0, 1[$ et tout l cette méthode converge.

On suppose dorénavant que $\omega \in]0, 1[$.

6. Montrer que le taux de convergence est minoré par $1 - \frac{\omega}{2}(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2$.

On construit la suite d'itérés $U_{n+1} = \Phi_{\sigma,J,l}(U_n, F_l)$.

7. On suppose que $\omega(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2 \leq 1$, montrer qu'il existe U_0 tel que l'erreur $e_n = \|U_n - A^{-1}b\|$ vérifie

$$e_n \geq \frac{1}{2}e_0$$

pour $n \leq (\omega(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2)^{-1}$.

(On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\ln(1-x) \geq -(2 \ln 2)x$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$.)

8.a. Montrer que si $U^0 - A^{-1}b \in \text{Vect}(V_l^{n_l-1+1}, \dots, V_l^{n_l})$, alors

$$e_n \leq (\delta(\omega))^n e_0$$

où $\delta(\omega) = \max(|1 - 2\omega|, 1 - \omega)$.

b. Trouver ω_0 tel que $\delta(\omega_0) = \min_{\omega \in]0, 1[} \delta(\omega)$.

On déduit des questions II.5. à II.8. que la méthode de Jacobi relaxée converge très lentement mais a la propriété de faire diminuer très vite la composante de l'erreur le long des vecteurs $V_l^{n_l-1+1}, \dots, V_l^{n_l}$. On se propose d'exploiter cette propriété et de coupler cette méthode avec une autre qui possède une propriété complémentaire.

Partie III

Dans toute cette partie ainsi que dans la suivante, on ne considère que le cas $\sigma = 0$. On notera

$$A_l = A_{0,l}, \quad M_{J,l} = M_{0,J,l}, \quad \text{et} \quad N_{J,l} = N_{0,J,l}.$$

On introduit les matrices $R_l \in \mathcal{M}(n_{l-1}, n_l)$ et $P_l \in \mathcal{M}(n_l, n_{l-1})$ définies par

$$(R_l U)_i = \frac{1}{4}(U_{2i-1} + 2U_{2i} + U_{2i+1})$$

pour $U \in \mathbb{R}^{n_l}$ et $i = 1, \dots, n_{l-1}$, et

$$(P_l V)_{2i} = V_i, \quad i = 1, \dots, n_{l-1},$$

$$(P_l V)_{2i+1} = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n_{l-1} - 1,$$

$$(P_l V)_1 = \frac{1}{2}V_1,$$

$$(P_l V)_{n_l} = \frac{1}{2}V_{n_{l-1}},$$

pour $V \in \mathbb{R}^{n_{l-1}}$.

On choisit deux entiers ν_1, ν_2 et on définit la méthode à deux grilles Φ_{ν_1, ν_2}^l qui associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \Phi_{\nu_1, \nu_2}^l(U^n, F_l)$ calculé par les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν_1 itérations de Jacobi relaxée :

$$* U^{n,0} = U^n,$$

$$* \text{Pour } k = 0, \dots, \nu_1 - 1, U^{n,k+1} = M_{J,l}U^{n,k} + N_{J,l}F_l.$$

$$* U^{n+1/3} = U^{n,\nu_1}.$$

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

$$* \text{Calcul du résidu : } r^n = A_l U^{n+1/3} - F_l.$$

$$* \text{Restriction : } \rho^n = R_l r^n.$$

$$* \text{Calcul de la correction : } \varepsilon^n = A_{l-1}^{-1} \rho^n.$$

$$* \text{Prolongement : } e^n = P_l \varepsilon^n.$$

$$* \text{Correction de } U^{n+1/3} : U^{n+2/3} = U^{n+1/3} - e^n.$$

Etape 3 : Faire ν_2 itérations de Jacobi relaxée :

$$* U^{n+2/3,0} = U^{n+2/3},$$

$$* \text{Pour } k = 0, \dots, \nu_2 - 1, U^{n+2/3,k+1} = M_{J,l}U^{n+2/3,k} + N_{J,l}F_l,$$

$$* U^{n+1} = U^{n+2/3,\nu_2}.$$

On note $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$ la matrice d'itération et $\mathcal{N}_l(\nu_1, \nu_2)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que

$$\mathcal{N}_l(\nu_1, \nu_2) = (I - \mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2))A_l^{-1}.$$

2. Exprimer $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$ en fonction de $M_{J,l}$, P_l , R_l , A_l , A_{l-1}^{-1} , ν_1 et ν_2 .
3. Montrer que pour $\nu_1 = \nu_2 = 0$, la méthode n'est pas convergente.
4. Montrer que pour $k = 1, \dots, n_{l-1}$:

$$P_l V_{l-1}^k = c_k^2 V_l^k - s_k^2 V_l^{n_l+1-k}$$

où on a posé

$$c_k = \cos \frac{k\pi}{2(n_l+1)}, \text{ et } s_k = \sin \frac{k\pi}{2(n_l+1)}.$$

5. Pour $k = 1, \dots, n_{l-1}$, calculer $R_l V_l^k$ et $R_l V_l^{n_l+1-k}$.
6. Montrer que pour $k = 1, \dots, n_{l-1}$, $\text{Vect}(V_l^k, V_l^{n_l+1-k})$ est stable par $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$.
7. Calculer $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2) V_l^{n_{l-1}+1}$.
8. Montrer que pour tout $\nu_1, \nu_2 \geq 0$:

$$\rho(\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)) = \rho(\mathcal{M}_l(0, \nu_1 + \nu_2)).$$

9. Montrer que pour tout $\nu \geq 0$,

$$\rho(\mathcal{M}_l(0, \nu)) \leq \rho_\nu(\omega) = \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} |\xi(1 - 2\omega\xi)^\nu + (1 - \xi)(1 - 2\omega(1 - \xi))^\nu|$$

et

$$\|\mathcal{M}_l(0, \nu)\| \leq m_\nu(\omega) = \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} \sqrt{2\xi^2(1 - 2\omega\xi)^{2\nu} + 2(1 - \xi)^2(1 - 2\omega(1 - \xi))^{2\nu}}.$$

(On pourra utiliser la question I.1.)

10. Calculer $\rho_1(\omega)$ pour $\omega \in]0, 1[$ et trouver ω_0 tel que $\rho_1(\omega_0) = \min \rho_1(\omega)$.
11. On suppose $\omega = \frac{1}{2}$. Montrer que la méthode à deux grilles est convergente pour tout $(\nu_1, \nu_2) \neq (0, 0)$.
12. Montrer que $\nu \rho_\nu(\frac{1}{2})$ et $\nu m_\nu(\frac{1}{2})$ ont une limite (que l'on précisera) quand $\nu \rightarrow +\infty$.

La méthode à deux grilles présente l'inconvénient de nécessiter le calcul exact de $A_{l-1}^{-1} \rho_n$ ce qui n'est pas acceptable dans la pratique. On remédie à ce problème en utilisant de manière récursive le passage à une grille plus grossière.

Partie IV

Pour trois entiers ν_1, ν_2 et γ , on définit la méthode multigrille à l grilles $\Psi_{\nu_1, \nu_2, \gamma}^l$ qui, pour $l \geq 2$, associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \Psi_{\nu_1, \nu_2, \gamma}^l(U^n, F_l)$ calculé par les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν_1 itérations de Jacobi relaxée :

- * $U^{n,0} = U^n$,
- * Pour $k = 0, \dots, \nu_1 - 1$, $U^{n,k+1} = M_{J,l}U^{n,k} + N_{J,l}F_l$.
- * $U^{n+1/3} = U^{n,\nu_1}$.

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

- * Calcul du résidu : $r^n = A_l U^{n+1/3} - F_l$.
- * Restriction : $\rho^n = R_l r^n$.
- * Calcul de la correction : $\eta^{n,0} = 0$, pour $k = 0, \dots, \gamma - 1$,
 $\eta^{n,k+1} = \Psi_{\nu_1, \nu_2, \gamma}^{l-1}(\eta^{n,k}, \rho^n)$, $\varepsilon^n = \eta^{n,\gamma}$.
- * Prolongement : $e^n = P_l \varepsilon^n$.
- * Correction de $U^{n+1/3}$: $U^{n+2/3} = U^{n+1/3} - e^n$.

Etape 3 : Faire ν_2 itérations de Jacobi relaxée :

- * $U^{n+2/3,0} = U^{n+2/3}$,
- * Pour $k = 0, \dots, \nu_2 - 1$, $U^{n+2/3,k+1} = M_{J,l}U^{n+2/3,k} + N_{J,l}F_l$,
- * $U^{n+1} = U^{n+2/3,\nu_2}$.

Pour $l = 1$, on prend $\Psi_{\nu_1, \nu_2, \gamma}^1 = \Phi_{\nu_1, \nu_2}^1$.

On note $\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)$ la matrice d'itération et $\widetilde{\mathcal{N}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que pour tout l , :

$$\widetilde{\mathcal{N}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma) = (I - \widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma))A_l^{-1}.$$

2. Montrer que pour $l \geq 2$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma) = \mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2) + C_l \left(\widetilde{\mathcal{M}}_{l-1}(\nu_1, \nu_2, \gamma) \right)^\gamma D_l$$

où C_l et D_l sont des matrices que l'on explicitera en fonction de $M_{J,l}$, P_l , R_l , A_l , A_{l-1}^{-1} , ν_1 et ν_2 .

3. Montrer que pour tout $l \geq 2$,

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)\| \leq \|\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)\| + \|\widetilde{\mathcal{M}}_{l-1}(\nu_1, \nu_2, \gamma)\|^\gamma.$$

4. On prend $\gamma = 2$. Montrer qu'il existe une fonction κ définie sur $[0, \frac{1}{4}]$ telle que si $m_{\nu_1+\nu_2}(\omega) \leq \frac{1}{4}$ alors pour tout $l \leq 1$

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, 2)\| \leq \kappa(m_{\nu_1+\nu_2}(\omega))$$

et

$$\frac{\kappa(m)}{m} \rightarrow 1$$

quand $m \rightarrow 0$.

5. Montrer que pour $\omega = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 2$, il existe ν_0 tel que pour $\nu_1 + \nu_2 \geq \nu_0$, la méthode multigrille $\Psi_l(\nu_1, \nu_2, 2)$ converge pour tout $l \geq 1$ avec un taux de convergence que l'on peut majorer indépendamment de l .

Partie V

On considère maintenant le cas $\sigma > 0$. On généralise la méthode à deux grilles de la partie III dans le cas $\nu_1 = \nu > 0$ et $\nu_2 = 0$.

On se restreint au cas $\omega = \frac{1}{2}$ pour lequel les calculs sont plus simples.

On obtient la méthode $\phi_{\sigma,\nu}^l$ qui associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \phi_{\sigma,\nu}^l(U^n, F_l)$ calculé par les deux étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν itérations de Jacobi relaxée :

- * $U^{n,0} = U^n$,
- * Pour $k = 0, \dots, \nu - 1$, $U^{n,k+1} = M_{\sigma,J,l}U^{n,k} + N_{\sigma,J,l}F_l$.
- * $U^{n+1/2} = U^{n,\nu}$.

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

- * Calcul du résidu : $r^n = A_{\sigma,l}U^{n+1/2} - F_l$.
- * Restriction : $\rho^n = R_l r^n$.
- * Calcul de la correction : $\varepsilon^n = A_{\sigma,l-1}^{-1}\rho^n$.
- * Prolongement : $e^n = P_l \varepsilon^n$.
- * Correction de U^{n+1} : $U^{n+1/2} = U^{n+1/3} - e^n$.

On note $\mathcal{M}_{\sigma,l}(\nu)$ la matrice d'itération et $\mathcal{N}_{\sigma,l}(\nu)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que si $0 \leq \mu \leq \|A_{\sigma,l}\|^{-1}$ alors

$$\|A_{\sigma,l}(I - \mu A_{\sigma,l})^\nu\| \leq \frac{1}{\mu(\nu + 1)}$$

2. Montrer que

$$\|A_{\sigma,l}(M_{\sigma,J,l})^\nu\| \leq \frac{4(1 + \sigma h_l^2)}{h_l^2(\nu + 1)}.$$

3. Montrer que

$$\|A_{\sigma,l}^{-1} - P_l A_{\sigma,l-1}^{-1} R_l\| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_l^2.$$

(On pourra utiliser les questions I.1. et I.4.)

4. Montrer que pour ν assez grand, la méthode à deux grilles $\phi_{\sigma,\nu}^l$ est convergente et que son taux de convergence peut être majoré par $\frac{\zeta_\sigma}{\nu}$ où ζ_σ ne dépend pas de l .

5. En vous inspirant de la partie IV, proposer une méthode multigrille $\psi_{\sigma,\nu,\gamma}^l$ construite en évitant le calcul de $A_{\sigma,l-1}^{-1}\rho^n$ dans la seconde étape de $\phi_{\sigma,\nu}^l$.

6. Montrer la convergence de cette méthode pour $\gamma = 2$ et ν assez grand.