A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

La partie II dépend des résultats de la partie I, mais pas de leur démonstration.

I. CHAÎNE DE GALTON-WATSON

- Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ de loi p, i.e. :

$$P\{Y = k\} = p_k = p(k) \qquad \left(k \in \mathbb{N},\ p_k \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1\right).$$

On supposera dans toute la suite de ce problème, sauf mention explicite du contraire, que $p_0 + p_1 < 1$.

- Soit f la fonction génératrice de Y, i.e. :

$$f(s) = E(s^Y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k \qquad (s \text{ réel}).$$

1.*a*. Prouver que f est toujours définie au moins pour $s \in [0, 1]$.

b. Prouver que f est de classe C^∞ sur $[0, 1[$ et qu'elle est strictement convexe.

c. Exprimer $P\{Y = 0\} = p_0$ en fonction de f. Que vaut $f(1)$?

d. Montrer que f admet une dérivée à gauche en 1, éventuellement infinie. Exprimer cette dérivée en fonction de l'espérance $E(Y)$ de Y.

e. Prouver que l'équation $f(s) = s$ admet une solution σ avec $0 \leqslant \sigma < 1$ si et seulement si $E(Y) > 1$. Y a-t-il d'autres solutions de cette équation dans l'intervalle $[0, 1[$?

2. On désigne par p^{*i} $(i \in \mathbb{N})$ la i-ième puissance de convolution de p. p^{*i} est définie par récurrence sur i par :

$$p^{*0} = \delta_0 \text{ (la mesure de Dirac en 0)};$$

$$p^{*1} = p, \qquad p^{*i+1}(k) = \sum_{j=0}^{k} p^{*i}(j)\, p(k-j).$$

a. Prouver que, pour tout $i \geqslant 0$ et tout $j \geqslant 0$:

$$p^{*i}(j) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p^{*i}(j) = 1.$$

Soit $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ la chaîne de Markov canonique à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

i. $X_0 = 1$ p.s. ; *ii*. $P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p^{*i}(j)$ $(i, j \in \mathbb{N})$.

b. Observer que 0 est un état absorbant pour la chaîne $(X_n\,;\, n \geqslant 0)$.

c. Soit g_n $(n \geqslant 0)$ la fonction génératrice de la v.a. X_n, i.e. :

$$g_n(s) = E(s^{X_n}) \qquad s \in [0, 1].$$

Prouver que pour tout n entier :

$$g_{n+1}(s) = g_n(f(s)).$$

Tournez la page S.V.P.

d. En déduire que $g_n(s) = f^{\circ n}(s)$, où $f^{\circ n}$ est la n-ième puissance de composition de f.

e. Soit $E_n = \{X_n = 0\}$ $\quad (n \geqslant 1)$.

Montrer que, pour tout n, $E_{n+1} \supset E_n$.

Soit $E = \{\exists\, n \geqslant 1 \text{ tel que } X_n = 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$;

Montrer que la probabilité de E, P (E), est égale à la plus petite racine, dans $[0, 1]$, de l'équation $f(s) = s$.

f. En déduire que $P(E) < 1$ si et seulement si $E(Y) > 1$.

3. Définissons :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n .$$

a. Prouver que : $P(Z < \infty) = 1$ si et seulement si $E(Y) \leqslant 1$.

b. On suppose dans toute la suite que $E(Y) \leqslant 1$. Soit h la fonction génératrice de la v.a. Z, i.e. : $h(s) = E(s^Z)$, $s \in [0, 1]$. Prouver que :

$$h(s) = s\, f(h(s)) .$$

c. Exprimer $E(Z)$ en fonction de $E(Y)$.

4. On suppose maintenant que la loi de Y (et donc celle de Z) dépend d'un paramètre t. On notera Y_t (resp. Z_t) la v.a. Y (resp. Z) pour indiquer la dépendance en ce paramètre.

On suppose que Y_t suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{t}{2+t}$ $(t \geqslant 0)$, i.e. :

$$P(Y_t = 1) = \frac{t}{2+t}, \qquad P(Y_t = 0) = \frac{2}{2+t} .$$

On observera qu'ici la condition $p_0 + p_1 < 1$ n'est pas satisfaite.

a. Soit $h_1(t, s) = E(s^{Z_t})$ $\quad (t \geqslant 0,\ s \in [0, 1])$.

Calculer $h_1(t, s)$, en utilisant 3.*b*.

En déduire la loi de Z_t, i.e. calculer :

$$P(Z_t = k) \qquad (t \geqslant 0,\ k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}) .$$

b. Peut-on retrouver le résultat de la question ci-dessus de manière plus élémentaire ?

c. Vérifier que $P(Z_t = k) = \dfrac{1}{k} P(Y_t^1 + \ldots + Y_t^k = k - 1)$ où $Y_t^1, \ldots Y_t^n, \ldots$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi que Y_t.

5. On suppose encore que la loi de Y (et donc celle de Z) dépend d'un paramètre t, mais cette fois Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, i.e. :

$$P(Y_t = k) = e^{-t} \frac{t^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

(pour $t = 0$, la loi de Y_t est la mesure de Dirac en 0).

a. Montrer que $E(Y_t) \leqslant 1$.

b. Soit $h_2(t, s) = E(s^{Z_t})$ $\quad (s, t \in [0, 1])$.

Prouver que :

$$h_2(0, s) = s \quad (s \in [0, 1]) ; \qquad h_2(t, 0) = 0 \quad (t \in [0, 1])$$

et que :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = h_2 \left(h_2 - 1 + t \frac{\partial h_2}{\partial t} \right) \qquad (t, s \in [0, 1]) .$$

c. Montrer que :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{s}{2}\frac{\partial h_2^2}{\partial s} - s\frac{\partial h_2}{\partial s} \qquad (t, s \in [0, 1]) .$$

d. On admettra que $P\{Z_t = k\} = \frac{1}{k} P\{(Y_t^1 + \ldots + Y_t^k = k-1)\}$ où $Y_t^1, Y_t^2, \ldots Y_t^n, \ldots$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi que Y_t. Calculer $P\{Z_t = k\}$ $(k \in \mathbb{N}^*, t \in [0, 1])$.

6. On suppose encore que la loi de Y (et donc celle de Z) dépend d'un paramètre t, mais cette fois Y_t suit une loi de Poisson de paramètre $1 - e^{-t}$ $(t \geqslant 0)$.

a. Prouver que $E(Y_t) \leqslant 1$.

b. Que vaut $P(Z_t = k)$ $\quad (t \geqslant 0, k \in \mathbb{N}^*)$?

c. Soit $h_3(t, s) = E(s^{Z_t})$ $\quad (s \in [0, 1],\ t \geqslant 0)$
et $m_3(t, s) = e^{-t} h_3(t, s)$.

Prouver que :

$$m_3(0, s) = s \quad (s \in [0, 1]); \qquad m_3(t, 0) = 0 \quad (t \geqslant 0);$$

$$\frac{\partial m_3}{\partial t} = \frac{s}{2}\frac{\partial m_3^2}{\partial s} - m_3 - s\,e^{-t}\frac{\partial m_3}{\partial s} .$$

II. ÉQUATIONS DE SMOLUCHONSKI

Soit $K : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Soit (S_K) l'équation :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} n(k, t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} K(j, k-j)\, n(j, t)\, n(k-j, t) - n(k, t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j, k)\, n(j, t) \\ n(k, 0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \geqslant 2 \\ 1 \text{ si } k = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots \\ t \geqslant 0 \end{array} \end{array}\right\} (S_K)$$

K sera ici successivement égal à $K(j, k) = K_1(j, k) \equiv 1$, $K(j, k) = K_2(j, k) = j \cdot k$, $K(j, k) = K_3(j, k) = j + k$.

On admettra que l'équation (S_K) possède une unique solution $n(k, t)$ positive :

- $n(k, t)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $t \geqslant 0$ si $K = K_1$;
- $n(k, t)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, 1]$ si $K = K_2$;
- $n(k, t)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $t \geqslant 0$ si $K = K_3$.

Dans toute la suite, on ne se préoccupera pas des problèmes de convergence des séries (à termes positifs) rencontrées, ni des problèmes d'interversion de sommes et de dérivée.

1. On suppose ici $K(j, k) = K_1(j, k) = 1$.

a. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} n(k, t) = \frac{2}{2+t}$, où n est la solution de (S_K).

Tournez la page S.V.P.

b. Définissons $c_1(k,t)$ par : $n(k,t) = \dfrac{2}{2+t}\, c_1(k,t) \quad (k \in \mathbb{N}^*, t \geqslant 0)$

et soit $\qquad r_1(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_1(k,t)\, s^k .$

Que vaut $r_1(0,s)$?

c. Prouver que :

$$\frac{2+t}{2}\,\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\,(r_1^2 - r_1)\,.$$

d. En déduire la valeur de $r_1(t,s)$.

e. Que valent $n(k,t)$, $c_1(k,t)$?

f. Qu'observe-t-on quand on compare ce résultat à la question I.4.*a.* ?

2. On suppose cette fois que $\mathrm{K}(j,k) = \mathrm{K}_2(j,k) = j \cdot k \quad (j,k \in \mathbb{N}^*)$.
   a. Soit n la solution de $(\mathrm{S_K})$ définie pour $t \in [0,1]$.

   Définissons $c_2(k,t)$ par $c_2(k,t) = k\, n(k,t)$

   et $\qquad r_2(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_2(k,t)\, s^k \quad (s,t \in [0,1])\,.$

   Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} c_2(k,t) = 1 \qquad (t \in [0,1])$,

   que $\qquad \dfrac{\partial r_2}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\, s\, \dfrac{\partial r_2^2}{\partial s} - s\, \dfrac{\partial r_2}{\partial s}$

   et que $\qquad r_2(0,s) = s, \qquad r_2(t,0) = 0\,.$

   b. Calculer, en utilisant I.5., la solution de $(\mathrm{S_K})$.

3. On suppose cette fois que $\mathrm{K}(j,k) = \mathrm{K}_3(j,k) = j + k \quad (j,k \in \mathbb{N}^*)$.
   a. Soit n la solution de $(\mathrm{S_K})$ définie pour $t \geqslant 0$.

   Prouver que : $\sum_{k=1}^{\infty} k\, n(k,t) = 1 \qquad (t \geqslant 0)$

   et que $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad (t \geqslant 0)\,.$

   b. Soit $r_3(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)\, s^k \quad (s \in [0,1], t \geqslant 0)\,.$

   Que vaut $r_3(t,1)$?

   Prouver que $\dfrac{\partial r_3}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\, s\, \dfrac{\partial r_3^2}{\partial s} - r_3 - s\, \mathrm{e}^{-t}\, \dfrac{\partial r_3}{\partial s}\,.$

   b. Calculer la solution de $(\mathrm{S_K})$. On pourra utiliser les questions I.6.