950 010

J. 5875

1999

3ᵉ ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 heures

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME D'ANALYSE

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés relatives à la croissance à l'infini des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Notations et rappels.

Dans tout le problème, O désigne le point du plan complexe d'affixe 0, $D(O,R)$ désigne le disque ouvert centré au point O et de rayon R et $\overline{D(O,R)}$ désigne le disque fermé centré au point O et de rayon R :

$$D(O,R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\} \text{ et } \overline{D(O,R)} := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}.$$

On dit que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une *fonction entière* si elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $R > 0$ et f holomorphe sur $D(O,R)$ (éventuellement $R = +\infty$ si f est entière). On rappelle que la série de Taylor de f en 0, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, a un rayon de convergence supérieur ou égal à R, et que

$$\forall z \in D(O,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

De plus, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$; ainsi la fonction $F : D(O,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in D(O,R),\ F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

est la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$\forall z \in D(O,R),\ F'(z) = f(z).$$

Enfin, on rappelle qu'en vertu du principe du maximum : si f est holomorphe dans le disque $D(O,R)$,

$$\forall r \in [0,R[,\ \max\{|f(z)|, |z| \leq r\} = \max\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Les parties **2**, **3**, et **5** sont indépendantes les unes des autres. La partie **4** dépend des résultats de la partie **1** et de la première question de la partie **3**.

1. Ordre d'une fonction entière : propriétés élémentaires

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une fonction entière.

Q.1.1) Montrer que, pour $n \geq 0$ et $r > 0$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta. \tag{1. 1}$$

Pour $r \geq 0$, on définit

$$M(r, f) := \max \{|f(z)|, |z| = r\}. \tag{1. 2}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $M(r, f) = M(r)$.

Q.1.2) Montrer que la fonction $r \mapsto M(r, f)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Q.1.3) Montrer que f est constante si $r \mapsto M(r, f)$ est constante.

Q.1.4) On suppose qu'il existe deux constantes positives c et k telles que

$$\forall r \geq 0,\ M(r, f) \leq c(1 + r^k). \tag{1. 3}$$

Montrer que f est un polynôme.

Q.1.5) Si f n'est pas un polynôme, il faut comparer $M(r, f)$ à des fonctions qui croissent à l'infini plus vite que tout polynôme. On dira que f est **d'ordre fini** s'il existe deux constantes $A \geq 0$ et $r_0 \geq 0$ telles que

$$\forall r \geq r_0,\ M(r, f) \leq e^{r^A}. \tag{1. 4}$$

Dans le cas contraire, on dit que f est d'ordre infini.
Si f est d'ordre fini, on définit **l'ordre** de f, noté ρ, comme étant la borne inférieure des nombres positifs A pour lesquels il existe $r_0(A)$ tel que (1. 4) soit satisfaite. Si f est d'ordre infini, on dit que f est d'ordre $\rho = +\infty$. Montrer que dans tous les cas

$$\rho = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln(\ln(M(r)))}{\ln r}. \tag{1. 5}$$

Q.1.6) Soient $A > 0$, $B_1 > 0$ et $B_2 > 0$. On suppose qu'il existe $r_0 \geq 0$ tel que

$$\forall r \geq r_0,\ M(r, f) \leq B_1 e^{B_2 r^A}. \tag{1. 6}$$

Montrer alors que f est d'ordre fini ρ et que $\rho \leq A$.

Q.1.7) Calculer l'ordre de f dans les exemples suivants :

Q.1.7.a) $f(z) = e^z$;

Q.1.7.b) $f(z) = e^{e^z}$;

Q.1.7.c) si P est un polynôme de degré k, montrer que $f(z) = e^{P(z)}$ est d'ordre k ;

Q.1.7.d) $f(z) = \cos\sqrt{z}$. (Vérifier que $z \mapsto \cos\sqrt{z}$ définit bien une fonction entière.)

Q.1.8) Soient f_1 et f_2 deux fonctions entières d'ordre respectif ρ_1 et ρ_2.

Q.1.8.a) Montrer que si $\rho_1 < \rho_2$, alors la fonction $f_1 + f_2$ est d'ordre ρ_2. Que peut-on dire si $\rho_1 = \rho_2$?

Tournez la page S.V.P.

Q.1.8.b) Montrer que si $\rho_1 \leq \rho_2$, alors la fonction $f_1 f_2$ est d'ordre $\rho \leq \rho_2$. A-t-on en général $\rho = \rho_2$?

Q.1.8.c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que la fonction $P f_1$ a pour ordre ρ_1.

Q.1.9) Soit f une fonction entière d'ordre fini. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{C}(z,1)$ le cercle centré en z et de rayon 1. Montrer que

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z,1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi. \tag{1. 7}$$

En déduire que f et f' ont même ordre.

2. Lien entre l'ordre d'une fonction entière et les coefficients de son développement en série de Taylor

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une fonction entière.

Q.2.1) Montrer que

$$|c_n|^{1/n} \longrightarrow 0 \ \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \tag{2. 1}$$

Q.2.2) On suppose qu'il existe $\beta \geq 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0,\ |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{n^\beta}. \tag{2. 2}$$

Montrer alors que f est d'ordre fini ρ et que

$$\rho \leq \frac{1}{\beta}. \tag{2. 3}$$

(On pourra introduire la suite d'entiers $(m_n = [n\beta])_n$, où $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière.)

Q.2.3) Réciproquement, si pour un certain $\alpha > 0$, il existe $r_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall r \geq r_0,\ M(r,f) \leq e^{r^\alpha}, \tag{2. 4}$$

montrer alors qu'il existe $A \geq 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0,\ |c_n|^{1/n} \leq \frac{A}{n^{1/\alpha}}. \tag{2. 5}$$

Q.2.4) En déduire que l'ordre ρ de f vérifie la relation :

$$\frac{1}{\rho} = \liminf_{n \to \infty} \frac{-\ln|c_n|}{n \ln n}. \tag{2. 6}$$

Soit $\alpha > 0$; calculer l'ordre des fonctions suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n\alpha}}, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} z^n.$$

3. L'EXPOSANT DE CONVERGENCE DES ZÉROS D'UNE FONCTION ENTIÈRE

Soit f une fonction entière. **Dans toute cette partie, on suppose que $f(0) = 1$.**

Soit $r > 0$. On rappelle qu'en vertu du théorème des zéros isolés, f n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque fermé $\overline{D(O,r)}$. On note $n(r)$ le nombre de zéros de f dans le disque $\overline{D(O,r)}$, et $(z_n)_n$ la suite des zéros de f répétés autant de fois que leur multiplicité l'exige, et rangés par ordre de module croissant.

Q.3.1) Soit $R > 0$ et $g : D(O,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (éventuellement $R = \infty$ si g est entière). On suppose que g ne s'annule pas sur $D(O,R)$ et que $g(0) = 1$. On veut montrer qu'il existe une fonction holomorphe $G : D(O,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$(3.\ 1) \qquad G(0) = 0 \ \text{ et } \ \forall z \in D(O,R),\ e^{G(z)} = g(z).$$

Q.3.1.a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $G : D(O,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$(3.\ 2) \qquad G(0) = 0 \ \text{ et } \ \forall z \in \mathbb{C},\ G'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Q.3.1.b) En déduire que G satisfait (3. 1).

Q.3.2) Soit $a \in \mathbb{C}$. On veut montrer que

$$(3.\ 3) \qquad \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{i\theta}|\, d\theta = \sup\{0, 2\pi \ln|a|\}.$$

Q.3.2.a) On suppose que $|a| < 1$. En appliquant le résultat de la question **Q.3.1)** à la fonction $g(z) = 1 - az$ et **Q.1.1)**, montrer que

$$(3.\ 4) \qquad \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{i\theta}|\, d\theta = 0.$$

Q.3.2.b) On suppose que $|a| > 1$. Montrer que

$$(3.\ 5) \qquad \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{i\theta}|\, d\theta = 2\pi \ln|a|.$$

Q.3.2.c) On suppose que $|a| = 1$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{i\theta}|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}|\, d\theta.$$

En déduire que (3. 3) est encore satisfaite.

Q.3.3) Soit $r > 0$.

Q.3.3.a) On suppose que f ne s'annule pas dans le disque fermé $\overline{D(O,r)}$. A l'aide des questions **Q.3.1)** et **Q.1.1)**, montrer que

$$(3.\ 6) \qquad \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta = 0.$$

Tournez la page S.V.P.

Q.3.3.b) Si f s'annule dans le disque fermé $\overline{D(O,r)}$, soient $z_1, \cdots, z_n$ les zéros de f dans $\overline{D}(O,r)$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \ln\frac{r^n}{|z_1\cdots z_n|}. \tag{3. 7}$$

(On pourra se ramener à **Q.3.3.a)** et utiliser **Q.3.2)**.)

Q.3.3.c) En déduire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta}|\,d\theta = \int_0^r \frac{n(u)}{u}\,du \tag{3. 8}$$

(formule de Jensen).

Q.3.4) On suppose que f est d'ordre fini ρ. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $r_0 \geq 0$ tel que

$$\forall r \geq r_0,\ n(r)\ln 2 \leq (2r)^{\rho+\varepsilon}. \tag{3. 9}$$

Q.3.5) Soit $\alpha > 0$. On considère la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha}.$$

Soit $\mu \in [0,+\infty]$ la borne inférieure de tous les nombres $\alpha > 0$ pour lesquels cette série converge. Montrer que $\mu \leq \rho$.

4. Une version faible du petit théorème de Picard

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une fonction entière. Soit $u(z) := \mathrm{Re}\ f(z)$. On définit

$$A(r,f) := \max\{u(z), |z| = r\}; \tag{4. 1}$$

lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on notera simplement $A(r,f) = A(r)$.

Q.4.1) Dans cette question, on suppose que $f(0) = 0$. Soit $R > 0$.

Q.4.1.a) Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ c_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta. \tag{4. 2}$$

Q.4.1.b) Montrer que

$$\forall z \in \overline{D(O,R)},\ |f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{\pi R^n}\left|\int_0^{2\pi}(u(Re^{i\theta}) - A(R,f))e^{-in\theta}\,d\theta\right|.$$

En déduire que

$$\forall 0 < r < R,\ M(r,f) \leq \frac{2r}{R-r}A(R,f). \tag{4. 3}$$

Q.4.2) On ne suppose plus que $f(0) = 0$. Montrer que :

(4. 4) $$\forall 0 < r < R,\ M(r,f) \leq \frac{2r}{R-r} A(R,f) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|,$$

(inégalité de Borel-Carathéodory.)
En déduire

(4. 5) $$\forall r > 0,\ M(r,f) \leq 2A(2r,f) + 3|f(0)|.$$

Q.4.3) Soit $f : z \mapsto e^z$. Montrer que f prend une infinité de fois toutes les valeurs sur $\mathbb{C}$, excepté 0, c'est-à-dire : pour tout $z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe une infinité de points z distincts tels que

(4. 6) $$f(z) = z'.$$

Q.4.4) Soit f entière d'ordre fini **non entier**. Montrer à l'aide des questions **Q.3.1)**, **Q.4.2)** et **Q.1.4)** que f prend toutes les valeurs une infinité de fois. (On pourra montrer que si, pour un certain $z' \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto f(z) - z'$ ne s'annule pas, alors f est de la forme $f(z) = e^{P(z)}$ où P est un polynôme; si $z \mapsto f(z) - z'$ s'annule un nombre fini de fois, on pourra se ramener au cas précédent avec **Q.1.8.c)**).

Q.4.5) Soit f une fonction entière. On dit que f est de **type fini** s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $C \geq 0$ et $r_0 \geq 0$ tels que

(4. 7) $$\forall r \geq r_0,\ \frac{1}{\ln r} \ln_n(M(r,f)) \leq C,$$

où la suite de fonctions $(\ln_n)_n$ est définie par récurrence par

(4. 8) $$\begin{cases} \ln_{n+1}(r) = \ln(\ln_n(r)), \\ \ln_1(r) = \ln(r). \end{cases}$$

Soit f de type fini. Prouver qu'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :

- ou f prend toutes les valeurs : pour tout $z' \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = z'$;
- ou il existe z_0' tel que la fonction $z \mapsto f(z) - z_0'$ ne s'annule jamais, et alors f prend toutes les autres valeurs une infinité de fois.

(On pourra raisonner à l'aide d'un argument de récurrence sur l'entier n intervenant dans (4. 7) et utiliser les questions **Q.3.1)**, **Q.4.2)** et **Q.1.4)**.
Peut-on espérer un résultat meilleur ?

Q.4.6) On admet le résultat suivant, dû à Picard : si f est entière et s'il existe deux valeurs distinctes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ telles que les fonctions $z \mapsto f(z) - z_1$ et $z \mapsto f(z) - z_2$ ne s'annulent jamais sur $\mathbb{C}$, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.

On suppose que f est entière et non polynomiale. Montrer que la fonction entière $z \mapsto f(f(z))$ admet au moins un point fixe. (On pourra raisonner par l'absurde, et montrer, en utilisant plusieurs fois le théorème de Picard admis, que la fonction

$$z \mapsto \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z},$$

est constante sur $\mathbb{C}$, puis que la fonction $z \mapsto f'(f(z))$ est constante sur $\mathbb{C}$.)

5. Le théorème de Paley-Wiener

Q.5.1) Soit f entière. On suppose qu'il existe $n \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ tels que

$$(5.\ 1) \qquad \begin{cases} \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq (1+|z|^n)e^{\lambda|\mathrm{Im}\ z|}, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq 1. \end{cases}$$

On veut montrer que

$$(5.\ 2) \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq e^{\lambda|\mathrm{Im}\ z|}.$$

Q.5.1.a) Soient$z = x + iy$ et $s > 0$ fixés. On considère la fonction

$$\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-i}{s}\},\ g_s(Z) = (1-isZ)^{-n-1}e^{i\lambda|y|Z}f(x+Zy).$$

En appliquant le principe du maximum sur un demi-disque bien choisi, montrer que

$$(5.\ 3) \qquad |g_s(i)| < 1.$$

Q.5.1.b) En déduire que

$$(5.\ 4) \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq e^{\lambda|\mathrm{Im}\ z|}.$$

Q.5.2) Soient $\lambda > 0$ et $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$. Soit

$$(5.\ 5) \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-itz}\,dt.$$

Montrer que f est entière et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \geq 0$ tel que :

$$(5.\ 6) \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq \frac{C_n}{(1+|z|)^n}e^{\lambda|\mathrm{Im}\ z|}.$$

Q.5.3) Réciproquement, on suppose que f est entière et possède la propriété suivante : il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \geq 0$ tel que (5. 6) est vérifiée. On veut montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$ telle que

$$(5.\ 7) \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-itz}\,dt.$$

Q.5.3.a) On considère la fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\,dx.$$

Montrer que ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q.5.3.b) Soit $y \in \mathbb{R}$. En intégrant la fonction $z \mapsto f(z)e^{itz}$ sur une courbe bien choisie, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x+iy)e^{it(x+iy)}\,dx.$$

Q.5.3.c) En déduire que ψ est nulle sur $]-\infty, -\lambda[\cup]\lambda, +\infty[$.

Q.5.3.d) Conclure.

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.