Université de Nancy I **Master 1**

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 13 octobre 2007

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés. Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées. Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont à valeurs réelles et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'opérateur d'espérance est noté $\mathbb{E}$. L'expression "presque sûrement" est parfois abrégée en p.s., tandis que la convergence en moyenne quadratique est appelée convergence dans L^2. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

– I –

$(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs tels que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$.

Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires de carrés intégrables telles que, quels que soient les entiers naturels i et j, on ait

$$\mathbb{E}[Z_i] = 0, \quad \mathbb{E}|Z_i Z_j| \leq \gamma_{i-j}.$$

On pose $U_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^n Z_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j=n+1}^{n+k} \gamma_{i-j}.$$

   En déduire qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq Mk.$$

2. (a) Pour $\varepsilon > 0$, établir la convergence de la série de terme général

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2).$$

   (b) Prouver que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'inégalité

$$\mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2).$$

(b) Prouver que la suite $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Conclure que la suite $(\frac{U_k}{k})_{k\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

– II –

Désormais $(c_k)_{k\geq 0}$ est une suite de réels telle que $\sum_{k\geq 0} c_k^2 < +\infty$ et $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de carrés intégrables, telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}[\zeta_k] = 0, \quad \mathbb{E}[\zeta_k^2] = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(\zeta_i)_{i\leq n}$, c'est à dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurables ces variables aléatoires.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série $\sum_{k\geq 0} c_k\zeta_{n-k}$ converge dans L^2.
2. Indiquer pourquoi cette convergence est aussi vraie presque sûrement.

On pose dorénavant, pour $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \sum_{k\geq 0} c_k\zeta_{n-k}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell.$$

– III –

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \geq 0$. Justifier l'existence de $\mathbb{E}[X_{n+\ell}|\mathcal{F}_\ell]$ et établir l'égalité

$$\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k} \text{ p.s.}$$

2. On pose, pour $n \geq 0$, $r_n = (\sum_{k\geq n} c_k^2)^{1/2}$, et on fait l'hypothèse $\sum\limits_{n\geq 0} r_n < +\infty$. On désigne ci-dessous par ℓ un entier naturel.
   (a) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]$ converge dans L^2.
   (b) Soit Z_ℓ la somme de cette série. Vérifier qu'il existe une constante s telle que, pour $\ell \geq 1$,
   $$X_\ell + Z_\ell - Z_{\ell-1} = s\zeta_\ell.$$
   (c) On pose $S'_n = \sum\limits_{\ell=1}^{n} s\zeta_\ell$. Étudier la convergence en loi de $(\frac{1}{\sqrt{n}}S'_n)_{n\geq 1}$, lorsque n tend vers l'infini.
   (d) Montrer que la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge vers une loi normale centrée dont on précisera la variance σ^2. On pourra utiliser, sans qu'il soit demandé de démonstration, que les variables aléatoires Z_n, $n \geq 1$, ont même loi.

FIN

Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

correction de l'examen du 13 octobre 2007

– I –

1. $U_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ et $U_{n+k} = \sum_{j=1}^{n+k} Z_j$, donc $U_{n+k} - U_n = \sum_{j=n+1}^{n+k} Z_j$, puis

$$(U_{n+k} - U_n)^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} Z_j Z_{j'},$$

d'où

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \mathbb{E} Z_j Z_{j'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] &\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} |\mathbb{E} Z_j Z_{j'}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} M \\
&\leq Mk,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $M = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$. On remarque qu'en particulier $\mathbb{E} U_k^2 = \mathbb{E}(U_k - U_0)^2 \leq Mk$.

2. (a) En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2) \leq \mathbb{P}(U_{n^2}^2 > \varepsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E} U_{n^2}^2}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{M n^2}{\varepsilon^2 n^4} = \frac{M \varepsilon^{-2}}{n^2}$$

ce qui assure la convergence de la série

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2) = \mathbb{P}(\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \varepsilon n^2)$ converge, le lemme de Borel-Cantelli assure que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}\{\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \varepsilon n^2\}) = 0.$$

Comme ε est quelconque, le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de V_n, on a

$$\{V_n > \varepsilon n^2\} = \bigcup_{n^2<k<(n+1)^2} \{|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2\}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) &\leq \sum_{n^2<k<(n+1)^2} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2)\\ &= \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2).\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$ et k entre n^2+1 et $(n+1)^2-1$: on peut écrire $k = n^2+\ell$, avec $\ell \in \{1,\ldots,2n\}$. On a

$$\mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2) = \mathbb{P}((U_k - U_{n^2})^2 > \varepsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}(U_{n^2} - U_k)^2}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{M\ell}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) &\leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2)\\ &\leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3}\\ &\leq (2n)\frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3} = \frac{4M\varepsilon^{-2}}{n^2}\end{aligned}$$

Comme précédemment, le lemme de Borel-Cantelli et le critère fondamental de convergence presque sûre entraînent alors que $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Posons $M_n = \max\{\frac{|U_k|}{k} : n^2 \leq k < (n+1)^2\}$ Soit $n \geq 1$ et k un entier avec $n^2 \leq k < (n+1)^2$: on a

$$\frac{|U_k|}{k} \leq \frac{|U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}| + |U_{n^2} - U_k|}{n^2} = \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{|U_{n^2} - U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}$$

En passant au max en k, on obtient

$$M_n \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}.$$

D'après les questions précédentes, cela entraîne que M_n tend presque sûrement vers 0. Mais pour tous les ω tels que $M_n(\omega)$ tend vers 0 $\frac{U_k(\omega)}{k}$ tend vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 = n_0(\omega, \varepsilon)$ tel que $M_n(\omega) < \varepsilon$ pour $n > n_0$, et par définition de M_n, on a $\frac{|U_k|(\omega)}{k} < \varepsilon$ pour $k > n_0^2$. Comme ε est quelconque cela entraîne que la suite $(\frac{U_k(\omega)}{k})_{k \geq 1}$ converge vers 0 pour ω dans un ensemble de probabilité 1, ce qui achève la preuve.

– II –

1. Posons $Y_i = \sum_{k=0}^{i} c_k \zeta_{n-k}$. Pour tout i, Y_i est de carré intégrable, centré car c'est une combinaison linéaire de variables de carrés intégrables, centrées. On va montrer que la suite (Y_i) est de Cauchy dans L^2 : soit $\varepsilon > 0$: comme la série des c_k^2 converge, il existe i_0 tel que le reste $\sum_{k=i_0+1}^{+\infty} c_k^2$ ne dépasse pas ε^2. Pour i et p entiers, on a

$$Y_{i+p} - Y_i = \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k \zeta_{n-k}.$$

On reconnait une somme de variables aléatoires indépendantes, de carrés intégrables : on a donc

$$\begin{aligned} \|Y_{i+p} - Y_i\|_2^2 &= \mathbb{E}(Y_{i+p} - Y_i)^2 = \text{Var}\ [Y_{i+p} - Y_i] \\ &= \sum_{k=i+1}^{i+p} \text{Var}\ (c_k \zeta_{n-k}) = \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k^2 \text{Var}\ \zeta_{n-k} \\ &= \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k^2 \leq \sum_{k=i+1}^{+\infty} c_k^2 \end{aligned}$$

Ainsi $i \geq i_0 \implies \|Y_{i+p} - Y_i\|_2 \leq \varepsilon$. Comme ε est quelconque, on a bien montré que (Y_i) est de Cauchy, ce qui suffit à montrer que (Y_i) converge dans L^2 qui est complet.

2. On sait que pour une série de variables aléatoires indépendantes, la convergence en probabilité entraîne la convergence presque sûre. Comme la convergence dans L^2 implique la convergence en probabilité, le résultat s'ensuit.

– III –

1. Par construction, $X_{\ell+n}$ est dans L^2 ; elle est donc en particulier dans L^1 ce qui suffit à justifier l'existence de l'espérance conditionnelle. Posons

$$R = \sum_{k\geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k} \text{ et } D = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta_{\ell+n-k}. \text{ On a alors } X_{n+\ell} = D + R.$$

   Pour tout $k \geq n$, $\ell+n-k \leq \ell$, donc $\zeta_{\ell+n-k}$ est $\mathcal{F}_\ell$ mesurable ; par suite R est $\mathcal{F}_\ell$ mesurable (la mesurabilité est préservée par la convergence presque sûre). On a donc évidemment $\mathbb{E}[R|\mathcal{F}_\ell] = R$.
   Pour tout $k < n$, $\ell+n-k > \ell$, donc $\zeta_{\ell+n-k}$ est $\sigma(\zeta_i, i > \ell)$ mesurable ; par suite D est $\sigma(\zeta_i, i > \ell)$ mesurable. Mais, d'après le théorème d'associativité de l'indépendance, les tribus $\sigma(\zeta_i, i < \ell)$ et $\mathcal{F}_\ell$ sont indépendantes : on a donc $\mathbb{E}[D|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[D] = 0$. D'où

$$\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \mathbb{E}[D+R|\mathcal{F}_\ell] = \mathbb{E}[D|\mathcal{F}_\ell] + \mathbb{E}[R|\mathcal{F}_\ell] = 0 + R = \sum_{k\geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k}.$$

2. (a) Comme L^2 est complet, il suffit de montrer que la série de terme général $\|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2$ converge. En reprenant les arguments invoqués au II.1, on voit que la suite $Y'_{n+\ell,i} = \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k}$ converge (lorsque i tend vers l'infini) dans L^2 vers $\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \sum_{k\geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k}$. Il en découle que

$$\|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2 = \lim_{i\to+\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k} \right\|_2$$

   Or, comme au II.1

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k} \right\|_2^2 &= \sum_{k=n}^{n+i} \text{Var } (c_k \zeta_{n-k}) \\ &= \sum_{k=n}^{n+i} c_k^2, \end{aligned}$$

   d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2 &= \lim_{i\to+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n+i} c_k^2 \right)^{1/2} \\ &= r_n \end{aligned}$$

   Comme la série de terme général r_n converge, cela donne le résultat voulu.

(b) On a, dans L^2, l'identité

$$\begin{aligned} Z_\ell &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k} \end{aligned}$$

De même

$$X_\ell = \sum_{k\geq 0} c_k\zeta_{\ell-k},$$

d'où l'identité dans L^2 :

$$Z_\ell + X_\ell = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} Z_{\ell-1} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell-1+n-k} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq n+1} c_k\zeta_{\ell-1+(n+1)-k} \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\left(\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}\right) - c_n\zeta_\ell\right) \end{aligned}$$

La série de terme général $((\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}) - c_n\zeta_\ell)_{n\geq 0}$ converge dans L^2 (sa somme est $Z_{\ell-1}$) ; de même la série de terme général $((\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}))_{n\geq 0}$ converge dans L^2 (sa somme est $X_\ell + Z_\ell$), donc la série de terme général $c_n\zeta_\ell$ converge dans L^2. Cela entraîne bien sûr que la série de terme général c_n converge dans $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\begin{aligned} Z_{\ell-1} &= -\left(\sum_{n\geq 0} c_n\right)\zeta_\ell + \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}\right) \\ &= -\left(\sum_{n\geq 0} c_n\right)\zeta_\ell + X_\ell + Z_\ell, \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'identité demandée avec $s = \sum_{n\geq 0} c_n$.

(c) $S'_n = \sum_{\ell=1}^n s\zeta_\ell$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées, admettant un moment d'ordre 2. Ainsi, d'après le théorème central limite $S'_n/\sqrt{n}$ converge presque sûrement vers $\mathcal{N}(0, s^2)$.

(d) En sommant l'identité $X_\ell + Z_\ell - Z_{\ell-1} = sX_\ell$ pour ℓ variant de 1 à n, on obtient

$$S_n + Z_n - Z_0 = s(\sum_{\ell=1}^{n} \zeta_\ell),$$

d'où

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}} - \frac{Z_n}{\sqrt{n}}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)| &\leq [\mathbb{E}|\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)|] \\
&\leq \mathbb{E}|1 - \exp(\frac{itZ_n}{\sqrt{n}})| \\
&\leq \mathbb{E}\frac{|tZ_n|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|t|\mathbb{E}|Z_n|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|t|\mathbb{E}|Z_1|}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que les (Z_n) sont des variables de même loi intégrables (car elles sont dans L^2). Ainsi, $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)$ tend vers 0. Mais d'après le théorème central limite $S'_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, s^2)$ et donc $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)$ vers $\exp(\frac{1}{2}t^2s^2)$. Par suite, $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n)$ converge vers $\exp(\frac{1}{2}t^2s^2)$ et donc, d'après le théorème de Lévy, $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, s^2)$.

Commentaires particuliers

I.1 De trop nombreux candidats semblent ignorer l'écriture

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

et ne connaître que l'expression

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

dont ils ne savent se dépétrer. Pourtant, de telles écritures apparaissent couramment, en particulier dans l'étude des formes quadratiques. Certains imaginent alors que l'identité $\mathbb{E}X_i^2 = (\mathbb{E}X_i)^2$ (qui est évidemment fausse) va leur permettre de s'en sortir. Rappelons que si une variable aléatoire positive est d'espérance nulle, elle est presque sûrement nulle : une telle situation viderait évidemment le problème de tout intérêt. Les erreurs sont toujours possibles, mais il faut essayer de garder du recul par rapport à ce que l'on écrit, cela permet de les identifier et de les corriger. De manière générale, une attitude critique par rapport à ses propres écrits est toujours payante.

I.1, encore Une rédaction étrange a souvent été trouvée : une fois établi que

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \quad \leq \quad \sum_{j=n+1}^{n+k}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j,$$

plusieurs candidats écrivent : "comme la série converge, il existe M tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j \leq M'',$$

puis concluent –ce qui est vrai – que $\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq Mk$. Mais si la série converge, il est aussi simple de poser $M = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j$! Ainsi, on a le sentiment que le bien fondé de l'écriture $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j$ n'est pas complètement assuré dans les esprits.

I.1, toujours Plusieurs candidats, n'ayant obtenu qu'une majoration

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \quad \leq Mk^2$$

pensent pouvoir poser $M' = M/k$, et ainsi obtenir par ce tour de passe-passe $\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq M'k$. Le problème, c'est que le M' ainsi obtenu dépend de k, alors qu'on avait demandé une majoration uniforme en n et en k. Il faut ainsi toujours faire attention à l'ordre des quantificateurs dans les propriétés dont la démonstration est demandée.

I.3.a On a souvent rencontré l'erreur suivante, qui consiste à dire que pour des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, il existe k_0 tel que

$$\{\max(X_1, \ldots, X_n) \geq h\} = \{X_{k_0} \geq h\}.$$

Or c'est faux : il est vrai que pour tout $\omega \in \{\max(X_1, \ldots, X_n) \geq h\}$, il existe $k_0(\omega)$ tel que $X_{k_0}(\omega) \geq h$, mais il n'existe pas nécessairement de k_0 qui convienne pour tous les ω.

II.1 L'expression "montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge" signifie bien que le but de la question est de donner un sens mathématique à l'expression "$\sum_{n \geq 0} u_n$" . Toute tentative de preuve qui commencerait par des calculs sur cette expression en supposant que son statut mathématique est défini est vouée à l'échec.

III.1 Très peu de candidat comprennent qu'il suffit de montrer que $X_{\ell+n}$ est intégrable pour justifier de l'existence de l'espérance conditionnelle. La plupart se lancent dans une longue discussion complètement hors-sujet.

III.4 Étonnament peu de succès pour cette question de cours très facile. Sans grapiller de manière outrancière, il est quand même bon de lire le sujet entièrement, et ce faisant, d'y repérer les endroits où l'on pourra faire valoir ses compétences.