3e ANNÉE

MATHÉMATIQUES (I)

DURÉE : 5 heures

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Avertissement

Les candidats pourront admettre les résultats des questions qu'ils n'ont pas traitées afin de pouvoir résoudre les questions suivantes.

Il sera tenu compte de la clarté du raisonnement et de la rédaction.

Dans ce qui suit u et v sont des fonctions numériques de la variable réelle x; leurs dérivées successives par rapport à x seront notées u', u'' ...
On désigne par L un nombre réel strictement positif; $C^k(]-L,+L[)$ est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur l'intervalle ouvert $]-L,+L[$, avec une définition analogue pour l'intervalle fermé $[-L,+L]$, les dérivées étant comprises au sens des dérivées à droite ou à gauche aux extrémités.

Préliminaires

On note par f l'une des deux fonctions suivantes de la variable réelle r

$$f(r) = \begin{cases} (1-r)r, \\ \text{ou} \\ (r-a)(1-r)r, \end{cases}$$

avec a un paramètre réel tel que $0 < a < 1$.
L'objet de ce problème est de déterminer pour chacune de ces deux fonctions le nombre de solutions de l'équation différentielle non linéaire

$$(E) \qquad u \in C^2([-L,+L]), \ \ \forall x \in [-L,+L], \ \ -u''(x) = f(u(x)),$$

vérifiant les contraintes

$$(E2) \qquad 0 \le u(x) \le 1, \ \ -L < x < +L,$$

et satisfaisant les conditions dites aux limites ou aux deux bouts

$$(E3) \qquad u(-L) = u(+L) = 0.$$

Tournez la page S.V.P.

Question 1. Soit u dans $C^1([-L,+L]) \cap C^2(]-L,+L[)$ vérifiant

$$(\hat{E}) \qquad \forall x \in]-L,+L[, \quad -u''(x) = f(u(x)).$$

Montrer que u est aussi solution de (E). Prouver que c'est encore le cas si l'on suppose seulement que u est dans $C^0([-L,+L]) \cap C^2(]-L,+L[)$ et vérifie $(\hat{E})$.

Question 2.

2.1 Vérifier que pour toute solution u de (E) le couple (u,u') est solution du système différentiel

$$(S.D.) \qquad \begin{cases} u, v \in C^1([-L,+L]), & \text{et} \quad \forall x \in [-L,+L], \\ \qquad u'(x) = v(x), \\ \qquad v'(x) = -f(u(x)). \end{cases}$$

2.2 Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux solutions de $(S.D.)$. On suppose qu'il existe un x_0 dans $[-L,+L]$ tel que

$$u_1(x_0) = u_2(x_0), \quad v_1(x_0) = v_2(x_0).$$

Montrer qu'alors $u_1 = u_2$ sur $[-L,+L]$.

2.3 Précisez toutes les solutions constantes de (E) pour les deux choix de f.
Soit u une solution de (E), constante sur un sous-intervalle ouvert non vide de $[-L,+L]$; montrer que u est constante sur $[-L,+L]$.

Question 3. Soit u solution de $(E)-(E2)$.

3.1 On suppose qu'il existe $x_0 \in]-L,+L[$ tel que $u(x_0) = 0$. Vérifier que $u'(x_0) = 0$. En déduire que $u(x) \equiv 0$ dans $[-L,+L]$.

3.2 On suppose qu'il existe $x_1 \in]-L,+L[$ tel que $u(x_1) = 1$. Montrer que $u(x) \equiv 1$ dans $[-L,+L]$.

3.3 En conclure que si u satisfait aussi $(E3)$ alors soit $u(x) \equiv 0$ dans $[-L,+L]$, soit $0 < u(x) < 1$ dans $]-L,+L[$.

Question 4. Soit u solution positive ou nulle de (E) et $(E3)$; montrer qu'elle vérifie $(E2)$.

Première partie

Dans cette partie on cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$(E1) \qquad u \in C^2([-L,+L]), \quad \forall x \in [-L,+L], \quad -u''(x) = (1-u(x))u(x),$$

vérifiant les contraintes $(E2)$ et satisfaisant les conditions aux limites $(E3)$.

Question 5. Montrer que toute solution u de $(E1)-(E2)$ satisfaisant en outre les conditions aux limites

$$u'(-L) = u'(+L) = 0$$

est une constante.

Question 6. Soit u solution non constante de $(E1)-(E2)-(E3)$.

6.1 Montrer que u admet un unique maximum global dans $]-L,+L[$, c'est-à-dire qu'il existe un unique x^* dans $]-L,+L[$ et un M^* dans $]0,1[$ tels que

$$u(x^*) = M^* \quad \text{et} \quad u(x) < M^*,\ \forall x \in]-L,+L[,\ x \neq x^*.$$

6.2 Montrer que si $x^* \neq 0$ alors le système $(S.D.)$ possède deux solutions passant par $(M^*,0)$. On pourra introduire la fonction auxiliaire $u^\sharp$ définie à partir de u par $u^\sharp(x) = u(-x)$.

6.3 En conclure que u est paire et atteint son unique maximum en $x = 0$.

Question 7. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy

$$(P1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & v, \\ v' & = & -(1-u)u, \\ u(0) & = & M \in]0,1[;\ \ v(0) = 0. \end{array} \right.$$

On va chercher à quelle(s) condition(s) sur L et M le problème de Cauchy $(P1)$ possède une solution définie sur $[0,L]$, y vérifiant $0 \leq u(x) \leq 1$ et satisfaisant $u(+L) = 0$.
On note $x_{sup}(M)$ la borne supérieure des réels $x > 0$ tels que $(P1)$ admette une solution dans $[0,x[$; montrer que $(P1)$ admet une unique solution dans $[0,x_{sup}(M)[$. On la note (u,v) et on l'appellera "solution globale" de $(P1)$ dans la suite.

Question 8. Soit (u,v) la solution globale de $(P1)$. On définit

$$\hat{x}(M) = \sup\{\, \overline{x} \in [0,x_{sup}(M)[,\ \ \forall x \in [0,\overline{x}[,\ \ 0 < u(x) < 1,\ \ u'(x) < 0\}.$$

8.1 Montrer que $\hat{x}(M) > 0$.

8.2 Montrer que

$$\begin{array}{lcl} \text{soit } \hat{x}(M) & = & +\infty, \\[1em] \text{soit } \hat{x}(M) & < & +\infty, \ \text{ et alors } \ \hat{x}(M) < x_{sup}(M),\ \ \displaystyle\lim_{x \to \hat{x}(M)} u(x) = 0. \end{array}$$

Question 9. Soit (u,v) la solution globale de $(P1)$. On pose

$$F(r) = \int_0^r (1-s)s\,ds.$$

9.1 Montrer que pour tout x dans $[0,x_{sup}(M)[$ on a

$$v^2(x) = 2F(M) - 2F(u(x)).$$

Tournez la page S.V.P.

9.2 Etablir que pour tout x dans $[0, \hat{x}(M)[$ on a

$$x = \int_{u(x)}^{M} \frac{ds}{\sqrt{2F(M) - 2F(s)}}.$$

On justifiera soigneusement la convergence de l'intégrale.

9.3 En déduire que $\hat{x}(M)$ est fini pour tout $M \in]0,1[$. Donner son expression au moyen d'une intégrale.

Question 10. On considère maintenant la fonction $\lambda :]0,1[\to]0,+\infty[$ définie par

$$\lambda(M) = \int_0^M \frac{ds}{\sqrt{2F(M) - 2F(s)}}, \quad 0 < M < 1.$$

10.1 On définit G par $F(r) = r^2 G(r)$. Etablir que

$$\lambda(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2G(M) - 2G(M\sin\theta)\ \sin^2\theta}} d\theta, \quad 0 < M < 1.$$

10.2 Montrer que

$$\lim_{M \to 0} \lambda(M) = \frac{\pi}{2}.$$

10.3 Montrer que λ est strictement croissante et continue sur $]0,1[$.

10.4 Montrer que

$$\lim_{M \to 1} \lambda(M) = +\infty.$$

Question 11. En conclusion de cette première partie

11.1 Revenant au problème de Cauchy $(P1)$, montrer que

- si $0 < L \leq \frac{\pi}{2}$ alors il n'existe pas de M dans $]0,1[$ tel que la solution globale de $(P1)$ vérifie $0 < u(x) < 1$ dans $]0, L[$ et $u(+L) = 0$;
- si $\frac{\pi}{2} < L$ alors il existe un unique M dans $]0,1[$ tel que la solution globale de $(P1)$ vérifie $0 < u(x) < 1$ dans $]0, L[$ et $u(+L) = 0$.

11.2 Revenant au problème initial $(E1) - (E2) - (E3)$, montrer que

- si $0 < L \leq \frac{\pi}{2}$ alors il n'existe pas de fonction non constante solution de $(E1) - (E2) - (E3)$;
- si $\frac{\pi}{2} < L$ alors il existe une unique fonction non constante solution de $(E1) - (E2) - (E3)$.

11.3 Pour tout réel $\rho > 0$ décrire l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} -u'' &= \rho(1-u)u, \quad 0 < x < 1, \\ 0 &\leq u(x) \leq 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{cases}$$

Seconde partie

Dans cette partie on cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$(E4) \quad u \in C^2([-L,+L]), \;\; \forall x \in [-L,+L], \;\; -u''(x) = (u(x)-a)(1-u(x))u(x),$$

vérifiant les contraintes $(E2)$ et satisfaisant les conditions aux limites $(E3)$; on suppose toujours que a est un paramètre réel tel que $0 < a < 1$.

On pose

$$\Phi(r) = \int_0^r (s-a)(1-s)s ds.$$

Question 12. Soit u solution de $(E4)-(E2)-(E3)$ vérifiant $0 \leq u(x) \leq a$, $\forall x \in [-L,+L]$. Montrer que $u(x) \equiv 0$ dans $[-L,+L]$.

Question 13. Soit u solution non constante de $(E4)-(E2)-(E3)$. On note x^* un point de $]-L,+L[$ où u atteint son maximum M^*.

13.1 Vérifier que u' est strictement décroissante au voisinage de x^*.

13.2 Montrer que pour tout $x \in]-L,+L[$ on a

$$(u')^2(x) = 2\Phi(M^*) - 2\Phi(u(x)).$$

13.3 En déduire que sur un voisinage de x^* que l'on précisera, on a

$$|x - x^*| = \int_{u(x)}^{M^*} \frac{ds}{\sqrt{2\Phi(M^*) - 2\Phi(s)}}.$$

Question 14. Soit u solution non constante de $(E4)-(E2)$ atteignant son maximum $M^* \in]a,1[$. Montrer que si $\Phi(M^*) < 0$ alors il existe un ν dans $]0,a[$ tel que $\Phi(\nu) = \Phi(M^*)$. En conclure que u est périodique et ne peut pas satisfaire $(E3)$.

Question 15. Montrer que l'équation $\Phi(r) = 0$ admet une unique racine α dans $]a,1[$ si et seulement si $0 < a < \frac{1}{2}$, et que dans ce cas $\Phi(r) < 0$ dans $]0,\alpha[$ et $\Phi(r) > 0$ dans $]\alpha,1[$.

Question 16. Déterminer toutes les solutions de $(E4)-(E2)-(E3)$ lorsque $\frac{1}{2} \leq a < 1$.

On supposera jusqu'à la fin de cette seconde partie que a est choisi tel que

$$0 < a < \frac{1}{2}.$$

Question 17. Soit u solution non constante de $(E4)-(E2)-(E3)$ atteignant son maximum $M^* \in [\alpha,1[$ en x^*.

17.1 Montrer que u est paire et que $x^* = 0$.

Tournez la page S.V.P.

17.2 Prouver ensuite que

$$|x| = \int_{u(x)}^{M^*} \frac{ds}{\sqrt{2\Phi(M^*) - 2\Phi(s)}}, \quad -L < x < +L.$$

et que $L = \mu(M^*)$ où on définit

$$\mu(M^*) = \int_0^{M^*} \frac{ds}{\sqrt{2\Phi(M^*) - 2\Phi(s)}}.$$

17.3 En déduire que M^* ne peut pas être égal à α.

17.4 Vérifier que $\mu(M^*)$ est fini pour tout $M^* \in]\alpha, 1[$.

Question 18. Soit maintenant $M^* \in]\alpha, 1[$.

18.1 Montrer que l'on peut définir implicitement une fonction u de $]-\mu(M^*), +\mu(M^*)[$ dans $]0, M^*[$ en posant $u(x) = y$ avec y solution de l'équation

$$|x| = \int_y^{M^*} \frac{ds}{\sqrt{2\Phi(M^*) - 2\Phi(s)}}, \quad -\mu(M^*) < x < +\mu(M^*).$$

18.2 Montrer que cette fonction u appartient à $C^0([-\mu(M^*), +\mu(M^*)])$ ainsi qu' à $C^2(]-\mu(M^*), +\mu(M^*)[)$, qu'elle est solution non constante de $-u'' = (u-a)(1-u)u$ dans son domaine de définition et qu'elle satisfait $(E3)$ si $\mu(M^*) = L$.

Question 19. Montrer que $\mu \in C^0(]\alpha, 1[) \cap C^1(]\alpha, 1[)$ et que

$$\begin{cases} \lim\limits_{M^* \to 1} \mu(M^*) & = +\infty, \\ \lim\limits_{M^* \to \alpha} \dfrac{d\mu}{dM^*}(M^*) & = -\infty. \end{cases}$$

Question 20. On admet provisoirement que $\frac{d\mu}{dM^*}$ ne s'annule qu'en un seul point M_0^* dans $]\alpha, 1[$. On pose

$$L_0 = \mu(M_0^*).$$

Revenant aux solutions non constantes de $(E4) - (E2) - (E3)$, toujours sous la condition $0 < a < \frac{1}{2}$, montrer que

- si $0 < L < L_0$ alors il n'existe pas de solutions non constantes;
- si $L_0 < L$ alors il existe deux solutions non constantes, et que ces deux solutions ne se coupent pas dans $] - L, +L[$;
- si $L = L_0$ il existe une unique solution non constante.

Question 21. Prouver que l'équation $\frac{d\mu}{dM^*}(M^*) = 0$ n'admet qu'une seule solution dans $]\alpha, 1[$.