B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Notations : *la dérivée partielle par rapport à une variable d'une fonction* $u(x,t)$ *sera notée indifféremment* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *ou* u_x*; la dérivé seconde* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *ou* u_{xx}.

On considère l'équation aux dérivées partielles

(1) $\quad u_t + f(u)_x = 0 \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad t > 0$

où f est une est une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u une fonction réelle de deux variables : $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

On dira que u est solution "classique" de (1) sur $\mathbb{R} \times [0,T[$ si u est continue sur $\mathbb{R} \times [0,T[$, de classe C^1 en dehors de segments de droites isolés sur $\mathbb{R}\times]0,T[$ et vérifie (1) en tout point de $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[$ de régularité de u.

Soit u une solution classique de (1) pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $t < T$.

1.- Montrer que u est constante sur les courbes $t \mapsto (x(t),t)$ d'un domaine U où u est C^1 (avec $t \in [0,T[$) et où $x(t)$ est C^1 et vérifie

(2) $\quad \frac{dx}{dt} = u(x(t),t) \quad 0 < t < T.$

En déduire que les courbes solutions de (2) sont des segments de droites et que, pour $t < T$, on peut si $(x,t) \in U$ exprimer $u(x,t)$ en fonction de u_0.

2.- On considère la condition initiale :

(3) $$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1-x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Donner une solution classique de (1) avec (3) pour $t < 1$; tracer la courbe $x \mapsto u(x,t)$ pour $t < 1$.

3.- Montrer que la construction de la question 1 ne permet pas, pour le problème (1)-(3), de définir une solution continue pour $t \geq 1$.

Tournez la page S.V.P.

4.- Donnez une condition initiale non constante u_0 de (1)(avec $f(u) = \frac{1}{2}u^2$) permettant de déterminer une solution classique de (1) pour tout $t > 0$.

5.- Montrer que si u est une solution "classique" de (1) pour $t < T$, alors les courbes $t \mapsto (x(t), t)$ d'un domaine U où u est C^1 vérifiant

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x(t), t)) \qquad x(0) = x_0$$

sont des segments d'équation :

$$x = f'(u_0(x_0))t + x_0 \qquad t \in [0, T[.$$

6.- Déduire de ce qui précède que, même si u_0 est indéfiniment dérivable , les solutions "classiques" de (1) sur $[0, T[$ peuvent ne pas être prolongeables par continuité en T.

7.- Si f est convexe, donnez une condition la moins contraignante sur u_0 pour qu'il existe une solution "classique" de (1) pour tout $t > 0$.

8.- Montrer que si u est une solution classique C^1 sur $I\!R \times [0, T[$ de (1) alors, pour toute fonction φ de $I\!R^2$ indéfiniment dérivable à support compact, on a :

$$(4) \qquad \int_{I\!R \times [0,T[} (u(x,t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) + f(u(x,t))\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t))dx\, dt + \int_{I\!R} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0.$$

Dans la suite on dira qu'une fonction u de $L^\infty(I\!R \times I\!R_+)$ est solution "faible" de (1) si u vérifie (4) pour toute fonction φ indéfiniment dérivable et à support compact.

Soit u une solution faible de (1) dans $I\!R \times [0, T[$.
On suppose que u est continue par morceaux dans un ouvert $\mathcal{D} \subset I\!R \times [0, T[$ et que u est discontinue le long d'une courbe régulière Γ qui sépare $\mathcal{D}$ en deux composantes connexes $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{D}_g$. On suppose que u est de classe C^1 dans $\mathcal{D}_d$ et dans $\mathcal{D}_g$. On note $u_d(x,t)$ la limite de $u(y,s)$ quand (y,s) tend vers $(x,t) \in \Gamma$ en restant dans $\mathcal{D}_d$. On définit de même $u_g(x,t)$, $f(u)_d(x,t)$, $f(u)_g(x,t)$ le long de Γ.

On note :

$$[h](x,t) = h_d(x,t) - h_g(x,t)$$

le "saut" à travers Γ de toute fonction h continue par morceaux.
Soit φ une fonction indéfiniment dérivable et à support compact dans $\mathcal{D}$. On note $n_t(s)$ et $n_x(s)$ les deux composantes d'un vecteur unitaire normal à Γ en $s \in \Gamma$.

9.- Montrer que :

$$\int_\Gamma (n_t(s)[u](s) + n_x(s)[f(u)](s))\varphi(s)ds = 0$$

On suppose que la courbe de discontinuité Γ précédente peut être paramétrée par la variable t sous la forme :

$$\Gamma = \{(\xi(t), t);\ t \in]t_1, t_2[\}$$

où ξ est de classe C^1 sur $]t_1, t_2[$.

10.- Montrer que si u est solution "faible" de (1) on a :

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{dt}[u] = [f(u)]$$

en tout point de Γ.

11.- Montrer que si u est de classe C^1 dans $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{D}_g$, vérifie (1) dans $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{D}_g$ et vérifie (5) sur Γ alors u est solution "faible" de (1) dans $\mathcal{D}$.

12.- Donner une solution faible de (1) - (3) avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$pour tout temps t.

13.- Pour $\alpha \geq 1$ on pose :

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha \quad \text{si} & \frac{1-\alpha}{2}t < x \leq 0 \\ \alpha \quad \text{si} & 0 < x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1 \quad \text{si} & \frac{\alpha-1}{2}t < x \end{cases}$$

Montrer que u_α est, pour tout $\alpha \geq 1$, solution faible de (1) avec la condition initiale $u_0(x) = -\operatorname{sgn} x$ ($\operatorname{sgn} x$ est le signe de x) et $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 telles que :

$$(6) \qquad F' = E'f'$$

On note u^ε la solution classique de l'équation

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \qquad u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)$$

avec u_0 continue et bornée. On suppose que u^ε est bornée sur $\mathbb{R} \times [0,T[$ par une constante indépendante de E et :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) \quad \text{presque partout dans} \quad \mathbb{R}\times]0,T[$$

avec u solution faible de (1).

Tournez la page S.V.P.

14.- Montrer que, pour toute fonction φ positive indéfiniment dérivable et à support compact dans $I\!R\times]-\infty,T[$:

$$(7) \quad 0 \leq \int_{I\!R\times]0,T[} (E(u)\varphi_t + F(u)\varphi_x)dxdt + \int_{I\!R} E(u_0(x))\varphi(x,0)dx.$$

On suppose maintenant que $E(u) = |u-k|$ et $F(u) = sgn(u-k)(f(u)-f(k))$. On pose alors :

$$E_n = E * \rho_n \quad \text{avec} \quad \rho_n(s) = n\rho(ns)$$

où ρ est une fonction indéfiniment dérivable, positive et à support compact dans $I\!R$ (* est le produit de convolution) telle que $\int_{I\!R} \rho(s)ds = 1$ et

$$F_n(s) = \int_0^s f'(y)E_n'(y)dy.$$

15.- En utilisant la question précédente avec E_n et F_n, montrer que (7) est encore vraie pour E et F.

Toute solution faible de (1) vérifiant (7) pour tout couple (E,F) vérifiant (6) et dite solution entropique.

16.- En prenant pour E la fonction $u \mapsto |u-k|$ où k est un paramètre réel quelconque, montrer que si u est solution entropique de (1) alors en tout point de la courbe Γ (définie à la question 10) :

$$\text{si} \quad u_g < u_d \quad \alpha f(u_g) + (1-\alpha)f(u_d) \leq f(\alpha u_g + (1-\alpha)u_d) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\text{si} \quad u_g > u_d \quad \alpha f(u_g) + (1-\alpha)f(u_d) \geq f(\alpha u_g + (1-\alpha)u_d) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in [0,1]$$

On montre (ce n'est pas demandé !) que la solution faible entropique est unique.

17.- Montrer que si f est convexe, la solution faible entropique de (1) n'admet que des discontinuités décroissantes.

18.- Quelle est la solution faible entropique de la question 13 ?

Soit v_j^n une approximation de $u(j\Delta x, n\Delta t)$ où Δx et Δt sont respectivement le pas d'espace et le pas de temps. Pour approcher la solution de (1) (qui peut être discontinue), on utilise le schéma :

$$(8) \qquad \begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - \lambda(F(v_j^n, v_{j+1}^n) - F(v_{j-1}^n, v_j^n)) \\ &= H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

où

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad \text{et} \qquad v_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x} u_0(x)dx$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $F(v,v) = f(v)$

On notera dans la suite

$$H(v_{-1}, v_0, v_1) = v_0 - \lambda(F(v_0, v_1) - F(v_{-1}, v_0))$$

19.- Montrer que

$$\sum_{j=-1}^{1} \frac{\partial F}{\partial v_j}(v,v) = f'(v) \quad \text{et} \quad \sum_{j=-1}^{1} \frac{\partial H}{\partial v_j}(v,v,v) = 1$$

en déduire que

$$\sum_{j=-1}^{1} j\,\frac{\partial H}{\partial v_j}(v,v,v) = -\lambda f'(v).$$

On montre que, si u solution de (4) est suffisamment régulière, on a :

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}(u(x,t+\Delta t) - H(u(x-\Delta x,t), u(x,t), u(x+\Delta x,t))) \\ &= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(u,\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,t) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

où

$$\beta(u,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{j=-1}^{1} j^2 \frac{\partial H}{\partial v_j}(u,u,u) - \frac{1}{2}(f'(u))^2$$

On dit que le schéma (8) est "monotone" si H est une fonction monotone croissante pour chacun de ses arguments.

Tournez la page S.V.P.

20.- Montrer que si (8) est monotone alors $\beta(u,\lambda) \geq 0$ et $\beta(u,\lambda) \neq 0$ sauf dans un cas trivial.
(On dit alors que le schéma (8) est, d'après (9), "au plus du premier ordre").

Dans le schéma de Lax-Friedrichs on a :

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)) + \frac{1}{2\lambda}(v_1 - v_2)$$

avec $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

21.- Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs est monotone sous réserve de la réalisation d'une condition sur λ que l'on explicitera.

Pour une suite $\bar{v} = (v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ on pose :

$$VT(\bar{v}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_{j+1} - v_j|$$

c'est la "variation totale" de la suite $\bar{v}$. Si $v^n = (v_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ on note $L(v^n) = (v_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}}$ la suite obtenue par le schéma (8).

22.- Si on écrit le schéma (8) sous la forme :

$$v_j^{n+1} = v_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n (v_{j+1}^n - v_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n (v_j^n - v_{j-1}^n)$$

montrer que si :

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \qquad D_{1+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

pour tout $n \geq 0$ et tout $j \in \mathbb{Z}$ alors le schéma (8) est à variation totale décroissante (sur un plan pratique on n'a pas création d'oscillations).