725 010

J. 5842

MATHS.

3e ANNÉE

-- AVR. 1997

MATHÉMATIQUES (I)

DURÉE : 5 heures

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Avertissement

Les parties de ce problème sont très largement indépendantes les unes des autres. Les candidats pourront donc admettre les résultats des questions qu'ils n'ont pas traitées afin de pouvoir résoudre les questions suivantes.

Il sera tenu compte de la clarté du raisonnement et de la rédaction.

1 Préliminaires

Le but de ce problème est l'étude de l'irrégularité de la série trigonométrique

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}.$$

C désigne dans toute la suite du problème une constante réelle dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

1) Soit $\alpha \in]0,1[$ et $f \in L^\infty(\mathbf{R})$. Par définition $f \in C^\alpha(\mathbf{R})$ s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \ \ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Montrer que $\mathcal{R} \in C^{1/2}(\mathbf{R})$. (On pourra séparer, dans l'estimation de $|\sin(\pi n^2 x) - \sin(\pi n^2 y)|$, le cas $n \leq |x-y|^{-1/2}$ du cas $n > |x-y|^{-1/2}$.)

2) Soit ψ une fonction $C^1 : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \ |\psi(x)| + |\psi'(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}. \quad (H1)$$

Si $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, on note, pour $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$

$$C_f(a,b) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

Tournez la page S.V.P.

a) Montrer que $C_f(a,b) \in L^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$.

b) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ et $\alpha \in]0,1[$. Par définition $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \ |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha.$$

On suppose désormais que ψ vérifie de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0. \quad (H2)$$

Montrer que si $f \in C^\alpha(x_0)$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$|C_f(a,b)| \leq C(a^\alpha + |b - x_0|^\alpha)$$

(on utilisera notamment l'inégalité $|a+b|^\alpha \leq 2(|a|^\alpha + |b|^\alpha)$).

3) On choisit désormais $\psi(x) = \dfrac{1}{(x-i)^2}$.

a) Vérifier que ψ vérifie les hypothèses (H1) et (H2).

b) Montrer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi nt}dt}{(t-b-ia)^2} &= i\pi n e^{in(b+ia)\pi} \quad \text{si } n \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

Soit

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z} \quad \text{pour} \quad Im(z) > 0,$$

Montrer que $C_{\mathcal{R}}(a,b) = \dfrac{ai\pi^2}{2}(\theta(b+ia) - 1)$.

4) a) Soit $F(x)$ la fonction 2π-périodique égale à $\dfrac{\pi - x}{2}$ pour $0 \leq x < 2\pi$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge dans $L^2([0,2\pi])$ vers F.

b) En déduire que, si g, g' et g'' appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{inx}dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(2k\pi)$$

(on justifiera la convergence des séries).

c) On rappelle que $\int e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$. Montrer que

$$\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{-iz}}\theta(-\frac{1}{z})$$

pour $z = ia$ (a réel strictement positif), puis pour tout z vérifiant $Im(z) > 0$.

2 Etude de la fonction θ.

On note G l'ensemble des fractions rationelles de la forme

$$\gamma(z) = \frac{rz+s}{qz+p} \tag{1}$$

vérifiant $r, s, p, q \in \mathbb{Z}$, $rp - sq = 1$ et

$$\begin{cases} (r,p) \in (2\mathbb{Z})^2 \quad \text{et} \quad (q,s) \in (2\mathbb{Z}+1)^2 \\ \text{ou} \\ (r,p) \in (2\mathbb{Z}+1)^2 \quad \text{et} \quad (q,s) \in (2\mathbb{Z})^2. \end{cases}$$

1) Montrer que si $\gamma \in G$, γ est une bijection du demi-plan $Im(z) > 0$ sur lui-même, et que G est un groupe pour la composition.

2) Le but de cette question est de montrer que G est le groupe engendré par $\sigma : z \to -1/z$ et $\tau : z \to z+2$. On note Λ l'ensemble des rationnels p/q (p et q premiers entre eux) tels que p et q ne soient pas tous deux impairs.

a) Soit γ une fraction rationelle appartenant à G, et donc de la forme (1). Montrer que si $-p/q \in \Lambda$ et $-p/q \notin]-1,1[$, il existe τ' translation par un nombre pair telle que le pôle de $\gamma \circ \tau'$ appartient à $]-1,1[$; montrer que si $-p/q \in \Lambda$, $-p/q \in]-1,1[$ et $p \neq 0$, le pôle de $\gamma \circ \sigma$ est q/p. En déduire que, pour tout rationnel $-p/q \in \Lambda$, il existe γ appartenant au groupe engendré par σ et τ tel que le pôle de γ soit $-p/q$.

b) Montrer que si deux éléments γ et γ' de G ont même pôle, $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ est une translation par un nombre pair.

c) Conclure.

3) Montrer que si $\gamma \in G$

$$\theta(z) = \theta(\gamma(z)) \frac{e^{im\pi/4}}{\sqrt{qz+p}}$$

où m est un entier que l'on précisera.

4) Montrer que $\lim\limits_{Im(z) \to +\infty} \theta(z) = 1$.

On note

$$h(x_0) = \sup\{\alpha : \ \mathcal{R} \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Déterminer $h(0)$, puis $h(-p/q)$ lorsque $-p/q \in \Lambda$

3 Approximation diophantienne

Jusqu'à la fin du problème ρ désigne un nombre réel irrationel positif fixé. On note $[x]$ la partie entière de x et l'on définit les suites x_n et a_n par

$$x_0 = \rho, \quad a_n = [x_n] \quad \text{et} \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Tournez la page S.V.P.

On notera enfin

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

1) Montrer que $r_n = p_n/q_n$ où p_n et q_n sont deux entiers vérifiant

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0, \quad q_0 = 1\\
p_1 &= a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1\\
p_n &= p_{n-1}a_n + p_{n-2}\\
q_n &= q_{n-1}a_n + q_{n-2}.
\end{aligned}$$

En déduire que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

2) Montrer que $\rho = \dfrac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}$. Montrer que ρ appartient à l'intervalle dont les bornes sont p_n/q_n et p_{n+1}/q_{n+1}, et donc que

$$|\rho - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

3) Montrer que $p_n/q_n \to \rho$ quand $n \to +\infty$.

4 Irrégularité de $\mathcal{R}$ en un point ρ irrationnel

1) Montrer que (p_n, q_n) et (p_{n+1}, q_{n+1}) ne peuvent appartenir simultanément à $(2\mathbb{Z}+1)^2$.

2) On note A l'ensemble des indices n tels que $(p_n, q_n) \notin (2\mathbb{Z}+1)^2$. Montrer que, si $n \in A$, on a (pour a assez petit)

$$|\theta(r_n + ia)| \geq \frac{1}{2\sqrt{q_n a}}.$$

3) Soit τ_n défini par

$$|\rho - \frac{p_n}{q_n}| = (\frac{1}{q_n})^{\tau_n}$$

et $\tau(\rho) = \limsup_{n \in A} \tau_n$. Fournir un majorant de $h(\rho)$ en fonction de $\tau(\rho)$.