CSA1-96

345 010

J. 1512

ENS

3e ANNÉE

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Avertissement

Les parties de ce problème sont très largement indépendantes les unes des autres. Les candidats pourront donc admettre les résultats des questions qu'ils n'ont pas traitées afin de pouvoir résoudre les questions suivantes.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de celle de la rédaction.

Notations

Si $X \subset \mathbb{R}$, on notera $\mathrm{Int}(X)$ l'intérieur de X, c'est à dire le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ qui est inclus dans X ($\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle définie par la norme $x \to |x|$).

On notera $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont deux fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$. $L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}$. Si $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ la norme de u dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est définie par

$$||u||_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$

Enfin, $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui sont bornées sur tout compact de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction telle que $f''(u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on notera par la suite

$$g(s) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (us - f(u)).$$

Le but de ce problème est de résoudre, dans le demi plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial (f \circ u)}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{1}$$

Tournez la page S.V.P.

avec une donnée initiale $u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et d'étudier quelques propriétés des solutions de cette équation.

Partie I

Par définition $I = \{s \in \mathbb{R} \quad / \quad |g(s)| < +\infty\}$ et $J = \{f'(u) \quad / \quad u \in \mathbb{R}\}$.

I. 1. Établir l'inégalité

$$f(u) - f(v) \geq f'(v)(u - v).$$

En déduire que $\forall v \in \mathbb{R}$, $f'(v) \in I$.

I. 2. Montrer que I est un intervalle non vide.

I. 3. Soit $s \in \mathrm{Int}(I)$, montrer que le maximum de la fonction $u \to us - f(u)$ est atteint en un point unique, que l'on notera par la suite $b(s)$. Montrer que

$$s = f'(b(s)) \quad \text{et que} \quad b(s) = (f')^{-1}(s).$$

I. 4. Montrer que J est un ouvert de $\mathbb{R}$; puis, en utilisant les questions précédentes, conclure que l'on a

$$\mathrm{Int}(I) = J \subset I.$$

Donner un exemple de fonction f pour laquelle $J = I$ ainsi qu'un exemple de fonction f pour laquelle l'inclusion $J \subset I$ est stricte.

I. 5. Montrer que $g'(s) = b(s)$. En déduire que d'une part g est de classe C^2 sur J et que d'autre part $\forall s \in J$, $g''(s) > 0$.

On note $S^- = \inf I$ et $S^+ = \sup I$. Montrer que $\lim\limits_{s \to S^\pm} g'(s) = \pm\infty$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction f est choisie de telle sorte que $S^- = -\infty$ et que $S^+ = +\infty$ et par conséquent $I = \mathbb{R}$. Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note

$$\Phi(y) = \int_0^y u_0(z)dz.$$

Enfin, $\forall t > 0$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on note

$$\Psi(y; t, x) = \Phi(y) + tg(\frac{x - y}{t}).$$

II. 1. En utilisant la question I. 5, montrer que $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to -\infty} \Psi(y; t, x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \to +\infty} \Psi(y; t, x) = +\infty.$$

En déduire que $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'application $y \in \mathbb{R} \to \Psi(y; t, x)$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est atteint.

II. 2. Soit $t > 0$ fixé. On suppose que pour x_1 (respectivement, pour x_2) le minimum de $y \to \Psi(y; t, x_1)$ (respectivement, de $y \to \Psi(y; t, x_2)$) est atteint en un point $y_1 \in \mathbb{R}$ (respectivement, $y_2 \in \mathbb{R}$).

Montrer que

$$g(\frac{x_2-y_1}{t})-g(\frac{x_1-y_1}{t})\geq g(\frac{x_2-y_2}{t})-g(\frac{x_1-y_2}{t}).$$

En utilisant la convexité de g, en déduire que $y_1 \leq y_2$.

II. 3. Définissons $\mathcal{E}(t,x)=\{y\in\mathbb{R}/\Psi(y;t,x)=\inf_{z\in\mathbb{R}}\Psi(z;t,x)\}$, on notera par la suite

$$y^-(t,x)=\inf\mathcal{E}(t,x) \quad \text{et} \quad y^+(t,x)=\sup\mathcal{E}(t,x).$$

On suppose que $t>0$ est fixé. Montrer, en utilisant la question précédente, que $y^-(t,x_0)=y^+(t,x_0)$ en tout point x_0 où ces fonctions de x sont continues.

II. 4. On suppose que $t>0$ est fixé. En utilisant le fait que $x\to y^{\pm}(t,x)$ sont des fonctions croissantes, montrer que l'ensemble des points de discontinuité de ces fonctions est au plus dénombrable. Conclure.

Partie III

Par définition $y_0(t,x)=y^-(t,x)$. Pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on définit

$$u(t,x)=b(\frac{x-y_0(t,x)}{t}).$$

On suppose dans tout ce qui suit que $f(u)=u^2/2$.

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques propriétés de $u(t,x)$ notamment au comportement de $u(t,x)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

III. 1. Déterminer explicitement $g(s)$ et $b(s)$. Montrer que dans ce cas on a bien $S^-=-\infty$ et $S^+=+\infty$.

III.2. Déterminer explicitement $u(t,x)$, dans le cas où

$$u_0(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<0,\\ 1 & \text{si} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

III. 3. Déterminer explicitement $u(t,x)$, dans le cas où

$$u_0(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<0,\\ -1 & \text{si} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

III. 4. En utilisant le fait que pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\Psi(y;t,x)\geq\Psi(y_0(t,x);t,x)$, montrer que pour tout $t>0$

$$||u(t,\cdot)||_{L^\infty}\leq||u_0||_{L^\infty}.$$

III. 5. On suppose que la donnée initiale $u_0\in L^\infty(\mathbb{R})$ vérifie

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_x^{x+a}u_0(z)dz=0,$$

uniformément en $x\in\mathbb{R}$. Donner un exemple de telles données initiales.

Montrer que sous cette hypothèse

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_0(t,x)-x}{t}=0,$$

Tournez la page S.V.P.

uniformément en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$, uniformément en $x \in \mathbb{R}$.

III. 6. On suppose dans cette question que u_0 est à support compact. Montrer qu'il existe une constante $E > 0$, qui ne dépend que de u_0, telle que

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(t,x)| \leq \frac{E}{t^{1/2}}.$$

III. 7. Dans cette question on suppose que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ est périodique de période 1. De plus, on suppose que

$$\int_0^1 u_0(z)dz = 0$$

et que le minimum de $\Phi(y) = \displaystyle\int_0^y u_0(z)dz$ sur $[0,1[$ est atteint en un unique point $y_* \in [0,1[$. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(t,x)| \leq \frac{1}{2t}$$

Partie IV

Dans cette partie, on suppose toujours que $f(u) = u^2/2$. De plus, on suppose que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ est deux fois continûment dérivable et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |xu_0(x)| \leq C.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que $u(t,x)$, qui a été définie dans la partie précédente, est solution (en un sens à préciser) de l'équation (1).

IV. 1. Soient $X > 0$ et $T > 1$ fixés. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de X, de T et de $||u_0||_{L^\infty}$, telle que

$$\forall t \in [1/T, T], \quad \forall x \in [-X, X] \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \int_0^y u_0(z)dz + \frac{1}{2t}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4t}y^2 - c.$$

IV. 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note

$$V_N(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-N\Psi(y;t,x))dy.$$

Montrer que V_N est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

IV. 3. Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$, l'application

$$u_N(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{N}\log V_N)(t,x),$$

est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que la suite $(u_N)_{N\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

IV. 4. Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$, l'application

$$f_N(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{N}\log V_N)(t,x),$$

est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que la suite $(f_N)_{N\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

IV. 5. Montrer que, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f_N}{\partial x}(t,x) = 0.$$

IV. 6. Montrer que, pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$y^-(t,x) = y^+(t,x)$$

et

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(y_0(t,x);t,x) > 0.$$

IV. 7. En utilisant la question précédente, montrer que, pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la propriété suivante est satisfaite :

$\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall \epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_0$

$$a_k(1-\epsilon) \leq N^{\frac{k+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - y_0(t,x)|^k \exp(-N(\Psi(y;t,x) - \Psi(y_0(t,x);t,x)))dy \leq a_k(1+\epsilon).$$

Où par définition

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^k \exp(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(y_0(t,x);t,x)z^2)dz.$$

IV. 8. On note $U_N(t,x) = -\frac{1}{N}\log V_N(t,x)$.

Montrer que, pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{N \to +\infty} U_N(t,x) = \Psi(y_0(t,x);t,x),$$

$$\lim_{N \to +\infty} u_N(t,x) = u(t,x)$$

et enfin

$$\lim_{N \to +\infty} f_N(t,x) = f(u(t,x)) = (u(t,x))^2/2.$$

Conclure.

IV. 9. On note $\delta(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(y_0(t,x) - x)$.

Montrer que $\lim_{t \to 0} \delta(t) = 0$ et que l'on a l'estimation

$$\Phi(x) - ||u_0||_{L^\infty}\delta(t) \leq \Psi(y_0(t,x);t,x) \leq \Phi(x).$$

En déduire que $\lim_{t \to 0} \Psi(y_0(t,x);t,x) = \Phi(x)$ uniformément. Conclure.