295 010

J. 5541

ENS

3e ANNÉE

MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le problème, le candidat pourra, pour résoudre une question, admettre les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été résolues. Les parties I, II et le début de la partie III sont très largement indépendants. Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction.

NOTATIONS

Soit (X, d) un espace métrique complet.

- Pour tout $x \in X$ et tout réel $s \geq 0$ on note $B(x, s) = \{ \ y \in X \mid d(x, y) < s \ \}$.
- Soient $A \subset X$ et $x \in X$. On note

$$d(x, A) = \inf\{ \ d(x, a) \mid a \in A \ \}.$$

- Soient A et B deux parties de X. On note

$$\delta(A, B) = \sup\{ \ \max\{d(a, B), d(b, A)\} \mid a \in A, \ b \in B \ \}.$$

- On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties non vides fermées et bornées de X et $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts non vides de X.
- Si (X', d') et (X'', d'') sont deux espaces métriques et si f est une application de X' dans X'', on définit la constante de Lipschitz de f par

$$\operatorname{Lip} f = \sup_{x \neq y} \frac{d''(f(x), f(y))}{d'(x, y)}.$$

On dira que f est lipschitzienne si $\operatorname{Lip} f < +\infty$ et que f est une application contractante si $\operatorname{Lip} f < 1$.

On considère un entier N strictement positif et une famille $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'applications de X dans X contractantes. On note r_i la constante de Lipschitz de S_i et pour tout $A \subset X$ on définit $\mathcal{S}(A)$ par

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{S_i(A)},$$

où $\overline{S_i(A)}$ désigne l'adhérence de $S_i(A)$.

PARTIE I

Dans cette partie, on va montrer qu'il existe un unique élement K de $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{S}(K) = K$. De plus K est compact.

(1) Soient A et B dans $\mathcal{B}$. Vérifier que pour tout $\alpha > 1$ et tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq \alpha \delta(A, B)$.

(2) Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{B}$.

(3) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$. Montrer que

$$A_\infty = \{ \ \lim_{n \to +\infty} a_n \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \in A_n \text{ et } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy } \}$$

est un fermé de X.

(4) On suppose cette fois que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour δ et l'on note pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\delta_p = \sup_{l,m\geq p} \delta(A_l, A_m).$$

(a) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\phi_0 = n_0$ et $\delta_{\phi_{k+1}} \leq \delta_{\phi_k}/2$. Montrer alors que pour tout $a_{n_0} \in A_{n_0}$, il existe une suite $(b_p)_{p\geq n_0}$ telle que $b_{n_0} = a_{n_0}$, $b_p \in A_p$ pour tout $p \geq n_0$ et $d(b_{\phi_k}, b_p) \leq 2\delta_{\phi_k}$ pour tout $p \geq n_0$ vérifiant $\phi_k < p \leq \phi_{k+1}$. Déduire alors que pour tout $a_{n_0} \in A_{n_0}$, il existe $a_\infty \in A_\infty$ tel que

$$d(a_{n_0}, a_\infty) \leq 4\delta_{n_0}.$$

(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $a_\infty \in A_\infty$, il existe $a_{n_0} \in A_{n_0}$ tel que

$$d(a_\infty, a_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0}.$$

(c) En déduire que $(\mathcal{B}, \delta)$ est un espace métrique complet.

(5) Montrer que $\mathcal{C}$ est fermé dans $\mathcal{B}$.

Indication: On pourra montrer que si F est une limite pour la distance δ de compacts alors F est un ensemble précompact (i.e. $\forall\epsilon > 0$, F peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ) et utiliser le fait qu'un fermé précompact est compact dans un espace métrique complet.

(6) Montrer que $\mathcal{S}$ définit une application contractante dans $\mathcal{B}$ pour la distance δ.

Indication: On pourra commencer par montrer que si A, B, C, et D sont quatre sous-ensembles de X alors

$$\delta(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{\ \delta(A, C), \delta(B, D)\ \}.$$

(7) Déduire le résultat annoncé en introduction de cette partie.

Partie II

On suppose dans cette partie que $X = \mathbb{R}^n$ et que d est la distance euclidienne naturelle sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in X$, on note $||x||$ la norme euclidienne de x. On supposera de plus dans cette partie que pour $i \in \{1, \cdots, N\}$, l'application contractante S_i est une similitude, c'est-à-dire vérifie

$$||S_i(x) - S_i(y))|| = r_i||x - y|| \quad \forall x, y \in X.$$

On imposera également la condition $r_i \in]0, 1[$.

Pour tout réel $k \geq 0$, tout réel $\eta > 0$ et tout ensemble $E \subset X$ on définit

$$\mathcal{H}^k_\eta(E) = \inf\{\ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i)^k \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, b_i) \text{ avec } x_i \in X \text{ et } b_i \leq \eta\ \}.$$

On note alors $\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\eta\to 0}\mathcal{H}^k_\eta(E)$. On **admettra** que $\mathcal{H}^k$ restreinte aux boréliens de X définit une mesure borélienne positive sur X. On rappelle pour les parties II et III, qu'une mesure sur X est dite borélienne si c'est une mesure définie sur la σ-algèbre des boréliens de X, c'est à dire sur la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts de X.

(1) Soit $E \subset X$. Montrer qu'il existe un unique réel $k \geq 0$ (que l'on appelle la dimension de Hausdorff de E) tel que

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < k, \\ 0 & \text{si } k < \alpha. \end{cases}$$

Dorénavant, la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble E de X sera notée $\dim(E)$. Cette notation est légitimée par le fait (admis) que la dimension de Hausdorff correspond à la dimension habituelle d'espace vectoriel pour tous les sous espaces vectoriels de X.

(2) On suppose dans cette question que $n = 1$ ($X = \mathbb{R}$), que $N = 2$ et qu'il existe $0 < r < 1/2$ tel que

$$S_1(x) = rx \text{ et } S_2(x) = 1 + r(x-1) \ \ \forall x \in X.$$

Soit K l'unique compact non vide de X tel que $\mathcal{S}(K) = K$.

(a) Montrer que $K \subset [0,1]$.

(b) Pour tout p-uplet $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1,2\}^p$, on considère l'ensemble $K_{i_1,\cdots,i_p} = S_{i_p} \circ \cdots \circ S_{i_1}(K)$. Montrer à p fixé que K est réunion disjointe des $K_{i_1,\cdots,i_p}$.

(c) Montrer que $\dim(K) = \ln(2)/\ln(1/r)$.

(3) On ne suppose plus ici que $n = 1$ ni que $N = 2$.

(a) Montrer qu'il existe un réel D positif unique tel que $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$.

(b) Soit K l'unique compact non vide de X tel que $K = \mathcal{S}(K)$.

(i) Montrer que $\mathcal{H}^D(K) < +\infty$ et que $\dim(K) \leq D$.

(ii) Soit $k = \dim(K)$ et l'on suppose que $0 < \mathcal{H}^k(K) < +\infty$. Montrer que

$$\mathcal{H}^k(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0 \ \ \forall i \neq j \text{ si et seulement si } k = D.$$

PARTIE III

Comme dans la partie II, on considère $X = \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne usuelle et pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on suppose que l'application contractante S_i est une similitude pour laquelle $r_i > 0$.

- Pour toute mesure positive borélienne μ, on définit le support de μ, noté $\mathrm{supp}(\mu)$, comme le *complémentaire dans* X de l'ensemble

$$\{ \ x \in X \mid \exists U \text{ ouvert }, \ x \in U, \ \mu(U) = 0 \ \}.$$

- On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures boréliennes *finies* et à support *borné* et

$$\mathcal{M}_1 = \{ \ \mu \in \mathcal{M} \mid \mu(X) = 1 \ \}.$$

- Pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1$ on note

$$L(\mu,\nu) = \sup\{ \int \phi d\mu - \int \phi d\nu \mid \phi : X \to \mathbb{R}, \ \mathrm{Lip}\phi \leq 1 \ \}.$$

- Pour tout $f : X \to X$ borélienne, on définit l'application $\widehat{f}$ de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_1$ par

$$\widehat{f}(\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ pour tout } E \text{ borélien.}$$

On pourra utiliser sans démonstration que pour tout $\phi : X \to \mathbb{R}$ continue,

$$\int \phi d(\widehat{f}(\mu)) = \int \phi \circ f d\mu.$$

On fixe une famille $(\rho_i)_{1\leq i\leq N}$ de réels dans $]0,1[$ telle que $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. On définit enfin

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\mathcal{S}}: & \mathcal{M}_1 & \to & \mathcal{M}_1 \\ & \mu & \to & \sum_{i=1}^{N} \rho_i \widehat{S_i}(\mu) \end{array}$$

(1) Vérifier que L définit une distance sur $\mathcal{M}_1$.

(2) Montrer que $\widehat{\mathcal{S}}$ est une application contractante pour la distance L. En admettant que $\mathcal{M}_1$ est complet pour la distance L, déduire qu'il existe une unique mesure μ_s dans $\mathcal{M}_1$ telle que $\widehat{\mathcal{S}}(\mu_s) = \mu_s$.

(3) Soit μ_s la mesure invariante introduite dans la question 2. Soit K le support de μ_s. Montrer que K est l'unique compact non vide vérifiant $\mathcal{S}(K) = K$.

On considère dorénavant que $\rho_i = r_i^D$ avec $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$; on note K l'unique compact non vide vérifiant $\mathcal{S}(K) = K$ et μ_s l'unique mesure dans $\mathcal{M}_1$ telle que $\widehat{\mathcal{S}}(\mu_s) = \mu_s$. On suppose de plus qu'il existe un ouvert borné non vide O de X tel que

- $\cup_{i=1}^{N} S_i(O) \subset O$,
- $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ pour tout $1 \leq i < j \leq N$.

Pour tout $1 \leq i \leq N$, on notera $O_i = S_i(O)$ et pour $p \geq 2$ entier, on définira par récurrence $O_{i_1,\cdots,i_p}$ pour tout p-uplet $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, \cdots, N\}^p$ par

$$O_{i_1,\cdots,i_p} = S_{i_p}(O_{i_1,\cdots,i_{p-1}}).$$

(4) (a) Vérifier que pour tout p-uplet $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, \cdots, N\}^p$ on a

$$\mu_s(O_{i_1,\cdots,i_p}) = \prod_{i=1}^{p} \rho_i.$$

(b) Montrer qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $x \in K$, tout $s > 0$ on a

$$\mu_s(B(x,s)) \geq \lambda_1 s^D.$$

Indication: On pourra considérer le plus petit entier $p \geq 1$ tel qu'il existe un p-uplet $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, \cdots, N\}^p$ tel que $x \in O_{i_1,\cdots,i_p}$ et $O_{i_1,\cdots,i_p} \subset B(x,s)$.

(c) Montrer pour tout $s > 0$, l'existence d'une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de K telle que pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$ on ait $d(x_i, x_j) \geq 2s$ et que de plus on ait $K \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, 2s)$.

(d) En déduire que $\mathcal{H}^D(K) < +\infty$.

(5) Pour tout réel $s \in]0,1[$ on définit l'ensemble

$$I_s = \{\ (i_1, \cdots, i_p) \mid p \in \mathbb{N}_*,\ (i_1, \cdots, i_p) \in \{1, \cdots, N\}^p \text{ et } \prod_{k=1}^{p} r_{i_k} \leq s < \prod_{k=1}^{p-1} r_{i_k}\ \}.$$

(On utilise ici la convention habituelle: $\prod_{\emptyset} = 1$)

(a) Soit $s \in]0,1[$. Montrer que si $(i_1, \cdots, i_p)$ et $(j_1, \cdots, j_{p'})$ sont deux éléments distincts de I_s alors

$$O_{i_1, \cdots, i_p} \cap O_{j_1, \cdots, j_{p'}} = \emptyset.$$

(b) Montrer qu'il existe un entier A tel que pour tout $s \in]0,1[$ et tout $x \in K$, le cardinal de l'ensemble

$$\{\ (i_1, \cdots, i_p) \in I_s \mid O_{i_1, \cdots, i_p} \cap B(x,s) \neq \emptyset\ \}$$

est plus petit que A.

Indication : On pourra considérer deux réels strictement positifs c_1 et c_2 tels que O contienne une boule de rayon c_1 et soit contenue dans une boule de rayon c_2.

(c) Montrer qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que pour tout $x \in K$, tout $s > 0$ on a

$$\mu_s(B(x,s)) \leq \lambda_2 s^D.$$

(d) En déduire que $\mathcal{H}^D(K) > 0$.

(6) Montrer que $\mu_s(E) = \mathcal{H}^D(E)/\mathcal{H}^D(K)$ pour tout partie borélienne E incluse dans K.