MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Le problème comporte deux parties

PROBLÈME D'ANALYSE

On se donne une fonction $f \in C^0(]-1,1[)$ et une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, et on se propose dans le problème qui suit de démontrer par diverses méthodes l'existence de solutions à l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}) \begin{cases} -u''(x) = g(u(x)) + f(x), & \text{pour } x \in]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Les parties I, II A, II B et II C sont indépendantes. Seule la partie II D utilise des résultats de II B et II C.

I. MÉTHODE DE MONOTONIE

1. Soit $u \in C^2(]-1,1[) \cap C^0([-1,1])$, et soit k une constante réelle. On suppose que

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u \geqslant 0 & \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(-1) \geqslant 0 & \text{et} \quad u(1) \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que $u \geqslant 0$ sur $]-1,1[$. Ce résultat est le principe du maximum. Que peut-on dire si u satisfait

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u \leqslant 0 & \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(-1) \leqslant 0 & \text{et} \quad u(1) \leqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

au lieu de (1) ?

2. Soit $h \in C^0([-1,1])$. On considère l'équation :

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = h \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que la solution de (3), si elle existe, est unique.

3. Prouver l'existence, dans $C^2(]-1,1[) \cap C^0([-1,1])$, d'une solution à (3). (On pourra considérer $v = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x \operatorname{sh} k(s-x)\, y(s)\, ds$ où $\operatorname{sh}(z)$ désigne le sinus hyperbolique de z.)

Tournez la page S.V.P.

4. On dit que $\underline{u}$ (respectivement $\overline{u}$) $\in C^2(]-1, 1[) \cap C^0([-1, 1])$ est une sous-solution (respectivement une sur-solution) de $(\mathscr{E})$ si et seulement si $\underline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} -\underline{u}'' \leqslant g(\underline{u}) + f(x) & \text{sur }]-1, 1[\\ \underline{u} \leqslant 0 & \text{sur } \{-1, 1\} \end{cases} \tag{4}$$

(respectivement

$$\begin{cases} -\overline{u}'' \geqslant g(\overline{u}) + f(x) & \text{sur }]-1, 1[\\ \overline{u} \leqslant 0 & \text{sur } \{-1, 1\} \end{cases} .) \tag{5}$$

Dans le cas où $f = 0$, $g(y) = \sin y$, construire une sous-solution $\underline{u}$ non nulle et une sur-solution $\overline{u}$ non nulle de $(\mathscr{E})$, avec $\underline{u} \leqslant \overline{u}$.

5. On suppose qu'il existe une sous-solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ à $(\mathscr{E})$. On fait l'hypothèse que

$$\underline{u}(x) \leqslant \overline{u}(x) \qquad \text{sur }]-1, 1[. \tag{6}$$

On va construire une solution de $(\mathscr{E})$. On choisit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{g}(y) = g(y) + k^2 y$ soit une fonction croissante de y sur l'intervalle $[\min(\underline{u}), \max(\overline{u})]$. On considère la suite de fonctions (u_n) dans $C^2(]-1, 1[) \cap C^0([-1, 1])$ définie de la façon suivante :

- $u_0 = \underline{u}$;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, u_{j+1} est une solution de

$$\begin{cases} -u''_{j+1} + k^2 u_{j+1} = \tilde{g}(u_j) + f(x) \\ u_{j+1}(-1) = u_{j+1}(1) = 0 . \end{cases} \tag{7}$$

a. Vérifier que la suite (u_n) existe et est unique.

b. Démontrer par récurrence que

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{N}, \ \underline{u} \leqslant u_j \leqslant u_{j+1} \leqslant \overline{u} \\ \quad \text{et } -u''_j + k^2 u_j \leqslant \tilde{g}(u_j) + f . \end{cases} \tag{8}$$

c. Montrer qu'il existe une fonction u sur $]-1, 1[$ telle que sur tout compact $K \subset]-1, 1[$, u_j converge vers u dans la topologie $C^2(K)$.

Montrer que u est une solution de $(\mathscr{E})$.

(*Indication :* montrer d'abord la convergence simple, puis que u_j, u''_j et u'_j sont bornés, puis la convergence uniforme, puis la convergence $C^2(K)$.)

II. MÉTHODE VARIATIONNELLE

On note $G(y) = \int_0^y g(t)\,dt$. On définit l'espace $\mathscr{L}^2(]-1, 1[)$ comme l'espace des fonctions φ mesurables de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ qui satisfont à

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)^2\,dx < +\infty .$$

On introduit sur $\mathscr{L}^2(]-1, 1[)$ la relation d'équivalence :

$$\varphi \mathscr{R} \psi \Leftrightarrow \varphi = \psi \text{ p.p.}$$

L'espace quotient $\dfrac{\mathscr{L}^2(]-1, 1[)}{\mathscr{R}}$ est noté $L^2(]-1, 1[)$.

On munit $L^2(]-1, 1[)$ du produit scalaire :

$$<\varphi, \psi>_{L^2} = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\psi(x)\,ds,$$

et de la norme $\|\varphi\|_{L^2} = \sqrt{<\varphi, \varphi>_{L^2}}$.

On rappelle que $C_c^\infty(]-1, 1[)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $]-1, 1[$.

Si $\varphi \in L^2(]-1, 1[)$, on dit que φ admet une dérivée au sens faible dans $L^2(]-1, 1[)$ si

$$\exists\, \psi \in L^2(]-1, 1[),\ \forall\, \alpha \in C_c^\infty(]-1, 1[),$$

$$\int_{-1}^{1} [\alpha'(x)\,\varphi(x) + \alpha(x)\,\psi(x)]\,ds = 0 .$$

On rappelle qu'alors ψ est unique et on note $\psi = \varphi'$, la dérivée au sens faible de φ. On note :

$$H^1(]-1, 1[) = \{\varphi \in L^2(]-1, 1[) \,/\, \varphi \text{ a une dérivée faible } \varphi' \text{ dans } L^2(]-1, 1[)\}.$$

$H^1(]-1, 1[)$ est muni du produit scalaire :

$$<\varphi, \psi>_{H^1} = <\varphi, \psi>_{L^2} + <\varphi', \psi'>_{L^2}$$

et de la norme $\|\varphi\|_{H^1} = \sqrt{<\varphi, \varphi>_{H^1}}$.

On rappelle que $(L^2(]-1, 1[), <\cdot, \cdot>_{L^2})$ et $(H^1(]-1, 1[), <\cdot, \cdot>_{H^1})$ sont des espaces de Hilbert.

Tournez la page S.V.P.

A

Dans cette partie, on montre deux résultats préliminaires qui seront utilisés dans les parties ultérieures. On considère les fonctions :

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\Pi^2}} \cos k\Pi x, \ \ k \in \mathbb{N}^*,$$

$$e_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\Pi^2}} \sin k\Pi x, \ \ k \in \mathbb{N}^*.$$

On rappelle que l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_j est dense dans $H^1(]-1, 1[)$.

1. Vérifier que (e_i) est une base orthonormée de H^1.

   Soit $u \in H^1(]-1, 1[)$. On note $\alpha_j = \, < u, e_j >$. On rappelle que

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \|u\|_{H^1}^2 .$$

2. Montrer le résultat suivant :

   $C^1([-1, 1])$ est dense dans $H^1(]-1, 1[)$. C'est-à-dire $\forall \varphi \in H^1(]-1, 1[)$, il existe une suite (φ_n) dans $C^1([-1, 1])$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{H^1} = 0$.

3. Soit (φ_n) une suite dans $H^1(]-1, 1[)$. On suppose que $(\|\varphi_n\|_{H^1})$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. Démontrer que l'on peut extraire une sous-suite n' de n telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $< e_j, \varphi_{n'} >$ tend vers une limite $a_j \in \mathbb{R}$. Soit (φ_n) une suite dans $H^1(]-1, 1[)$, et soit $\varphi \in H^1(]-1, 1[)$. On dit que φ_n converge faiblement vers φ dans H^1, et on note $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \ H^1$, si

$$\forall \alpha \in H^1(]-1, 1[), \quad \lim_{n \to +\infty} < \varphi_n, \alpha >_{H^1} \, = \, < \varphi, \alpha >_{H^1} .$$

   Démontrer que de toute suite (φ_n) bornée de $H_1(]-1, 1[)$ (c'est-à-dire telle que $\|\varphi_n\|_{H_1}$ est borné), on peut extraire une sous-suite $\varphi_{n'}$ telle que

$$\varphi_{n'} \rightharpoonup \varphi \ H^1 .$$

B. Minimisation

1. Pour tout $x_0 \in]-1, 1[$ on note χ_{x_0} la fonction de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]-1, x_0[, \ \chi_{x_0}(x) = [\operatorname{th}(1 + x_0) + \operatorname{th}(1 - x_0)]^{-1} \frac{\operatorname{ch}(1 + x)}{\operatorname{ch}(1 + x_0)}$$

$$\forall x \in]x_0, 1[, \ \chi_{x_0}(x) = [\operatorname{th}(1 + x_0) + \operatorname{th}(1 - x_0)]^{-1} \frac{\operatorname{ch}(1 - x)}{\operatorname{ch}(1 - x_0)}$$

$$\chi_{-1}(x) = \frac{\operatorname{ch}(1 - x)}{\operatorname{sh} 2}; \qquad \chi_1(x) = \frac{\operatorname{ch}(1 + x)}{\operatorname{sh} 2},$$

où th désigne la tangente hyperbolique et ch désigne le cosinus hyperbolique.
Démontrer que $\chi_{x_0} \in H^1(]-1, 1[)$, et calculer $\|\chi_{x_0}\|_{H^1}$.

2. Soit $\varphi \in C^1([-1, 1])$, montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \ |\varphi(x)| \leqslant C(x) \, \|\varphi\|_{H^1}, \tag{9}$$

où

$$C(x) = [\operatorname{th}(1 + x) + \operatorname{th}(1 - x)]^{-\frac{1}{2}} \leqslant (\operatorname{th} 2)^{-\frac{1}{2}} = C_1 .$$

3. Soit $\varphi \in H^1(]-1, 1[)$. D'après A.2., il existe une suite $\varphi_n \in C^1([-1, 1])$, telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} = 0$.
Démontrer que φ_n converge uniformément vers une fonction continue sur $[-1, 1]$. En déduire que φ est continue sur $[-1, 1]$ (c'est-à-dire que l'on peut choisir un représentant continu sur $[-1, 1]$ pour φ).

4. Démontrer que $\forall u \in H^1(]-1, 1[)$, $\forall x, y \in]-1, 1[$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|u'\|_{L^2} \sqrt{|x - y|} . \tag{10}$$

On note $H_0^1(]-1, 1[) = \{\varphi \in H^1(]-1, 1[) / \varphi(-1) = \varphi(1) = 0\}$.

Démontrer que $\forall u \in H_0^1(]-1, 1[)$,

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C \|u'\|_{L^2},$$

où C est une constante que l'on précisera.

5. Soit (φ_n) une suite de $H_0^1(]-1, 1[)$. On suppose que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \ H^1$ (voir A.3.).
Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$; en déduire en particulier que $\varphi \in H_0^1(]-1, 1[)$, c'est-à-dire que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

6. Soit (φ_n) une suite comme au 5. On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\| \varphi_n' \|_{L^2} \leqslant M$.
Montrer que φ_n converge uniformément vers φ.

7. On considère pour tout $u \in H^1(]-1, 1[)$,

$$E(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{(u'(x))^2}{2} - G(u(x)) - f(x)\, u(x) \right] dx .$$

Montrer que E est minoré sur $H_0^1(]-1, 1[)$. Soit (u_n) une suite minimisante de E dans $H_0^1(]-1, 1[)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1(]-1, 1[) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} E(u_n) = \inf\limits_{\varphi \in H_0^1(]-1, 1[)} E(\varphi) . \end{cases} \tag{12}$$

a. Montrer que $\| u_n \|_{H^1}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. En déduire, grâce au résultat énoncé au A.3., que l'on peut extraire une sous-suite (n') de n telle que

$$u_{n'} \rightharpoonup u \, H^1 .$$

Pour alléger les notations, on posera dans la suite $n' = n$.

b. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(u_n) = E(u)$.

c. En déduire que u est solution au sens faible de $(\mathscr{E})$, c'est-à-dire $\forall \alpha \in H_0^1(]-1, 1[)$

$$\int_{-1}^{1} [u''(x) + g(u(x)) + f(x)]\, \alpha(x)\, dx = 0 \tag{13}$$

(où l'on pose $\displaystyle\int_{-1}^{1} u''(x)\, \alpha(x) = \int_{-1}^{1} - u'(x)\, \alpha'(x)\, dx$).

C. Un lemme géométrique

Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère l'espace $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{p} x^i y^i$. On se donne une fonction I dans $C^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. On fait les hypothèses suivantes sur I :

i. $I(0) = 0$;

ii. $\exists\, y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $I(y) \leqslant 0$;

iii. $\exists\, r \in]0, \|y\|[$, $\exists\, \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$, si $\|x\| = r$ alors $I(x) \geqslant \alpha$;

iv. Si $c \in \mathbb{R}$, et si (x_n) est une suite de $\mathbb{R}^p$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} I(x_n) = c$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} I'(x_n) = 0$, alors il existe une sous-suite (n') de (n), et un point x de $\mathbb{R}^p$, tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n'} = x \in \mathbb{R}^p$. (Ici $I'(x)$ est le gradient de I au point x, c'est-à-dire le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont $\dfrac{\partial I}{\partial x^i}$, $i \in \{1, \dots, p\}$.)

L'objet de cette section est de prouver que sous les hypothèses i., ii., iii. et iv. il existe $a \in \mathbb{R}^p$ tel que $I'(a) = 0$.

1. On note $V = \{\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R}^p) / \gamma(0) = 0, \gamma(1) = y\}$. Déduire de i., ii. et iii. l'inégalité

$$c \equiv \inf_{\gamma \in V} \sup_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \geqslant \alpha .$$

Faire un dessin illustrant cette propriété dans le cas $p = 2$.

2. Soit $I \in C^2(\mathbb{R}^p)$ une fonction telle que $\exists R > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\| \geqslant R \Rightarrow \|I'(x)\| \geqslant \lambda$.
Expliquer pourquoi dans ce cas-là I satisfait iv. Trouver un exemple de fonction $I \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ pour lequel iv. n'est pas vrai.

3. On considère I vérifiant i., ii., iii. et iv. On suppose que $\{x / I'(x) = 0, I(x) = c\} = \varnothing$.
Démontrer, $\exists \varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \alpha$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$,

$$I(x) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \Rightarrow \frac{\|I'(x)\|}{1 + \|I'(x)\|^2} \geqslant \delta . \tag{14}$$

4. Soit ε comme au 3. et soit χ une fonction de $C^1(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \ \chi(x) = 0,$$

$$\forall x \in \left[c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}\right], \ \chi(x) = 1 .$$

On considère le champ de vecteur X sur $\mathbb{R}^p$ défini par

$$X(x) = -\chi[I(x)] \frac{I'(x)}{1 + \|I'(x)\|^2} .$$

On considère $\eta : [0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, (t, x) \mapsto \eta(t, x)$

solution de
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t}(t, x) = X(\eta(t, x)) \\ \eta(0, x) = x . \end{cases}$$

Expliquer pourquoi η existe et est C^1. Démontrer que pour tout x fixé, $t \mapsto I(\eta(t, x))$ est une fonction décroissante, et que l'on a

- si $|I(x) - c| \geqslant \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$, $\eta(t, x) = x$.

Démontrer qu'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que

- si $I(x) \leqslant c + \bar{\varepsilon}$, alors $I(\eta(1, x)) \leqslant c - \bar{\varepsilon}$.

5. Démontrer qu'il existe $\gamma \in V$ tel que

$$\max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \leqslant c + \bar{\varepsilon} .$$

Que peut-on dire sur $s \mapsto \eta(1, \gamma(s))$? Conclure.

Tournez la page S.V.P.

D. Application

Dans cette partie, g n'est plus une fonction bornée, mais on suppose que $f = 0$ et $g(y) = |y|^{p-1}y$ où $p \in]1, +\infty[$. On cherche u, solution faible de

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = 0 & \text{sur }]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Pour cela, on considère la fonctionnelle :

$$\mathrm{I}(u) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(u')^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right) \mathrm{d}x,$$

sur $\mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$.

1. Démontrer que I est dans $\mathrm{C}^1(\mathrm{H}^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{I}'(u)$. Existe-t-il $u \in \mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$ qui minimise I ? On admettra dans la suite que I est dans $\mathrm{C}^2(\mathrm{H}^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$.

2. On admet la généralisation suivante du résultat démontré dans la partie C. Si I est une fonctionnelle dans $\mathrm{C}^2(\mathrm{H}_0^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$ et si :

   i. $\mathrm{I}(0) = 0$;

   ii. $\exists\, \varphi_0 \in \mathrm{H}_0^1(]-1, 1[),\ \mathrm{I}(\varphi_0) \leqslant 0$;

   iii. $\exists\, r \in]0, \|\varphi_0\|_{\mathrm{H}^1}[,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, \varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-1, 1[),$ si $\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1} = r$ alors $\mathrm{I}(\varphi) \geqslant \alpha$;

   iv. Si $c \in \mathbb{R}$ et si (φ_n) est une suite de $\mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}(\varphi_n) = c$ et $\mathrm{I}'(\varphi_n) \to 0$ dans $\mathrm{H}^{-1}(]-1, 1[)$, alors il existe une sous-suite (n') de (n) telle que $\varphi_{n'} \longrightarrow \varphi\ \mathrm{H}^1(]-1, 1[)$.

   (On rappelle que $\mathrm{H}^{-1}(]-1, 1[)$ est le dual de $\mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$ et que cet espace est muni de la norme
   $$\|\psi\|_{\mathrm{H}^{-1}} = \sup\{(\psi, \varphi) / \varphi \in \mathrm{H}^1(]-1, 1[), \|(\varphi)\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant 1\},$$
   où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit de dualité entre H^{-1} et H^1.)

   Alors il existe $u \in \mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$ tel que $\mathrm{I}'(u) = 0$.

   Démontrer que I vérifie i., ii. et iii.

3. On considère une suite (φ_n) dans $\mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$. On suppose que $\exists\, \mathrm{C} > 0, |\mathrm{I}(\varphi_n)| \geqslant \mathrm{C}$ et que $\mathrm{I}'(\varphi_n) \to 0\ \mathrm{H}^{-1}$.

   a. Montrer que $\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant 2\sqrt{\mathrm{C} + \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\int_{-1}^{1} |\varphi_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x}$.

   b. Montrer que $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1}\right)\displaystyle\int_{-1}^{1} |\varphi_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{C} + \dfrac{1}{2}\|\mathrm{I}'(\varphi_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}}\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^1}$.

   c. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\varphi_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x$ et $\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^1}$ sont bornés.

   d. Démontrer qu'il existe $u \in \mathrm{H}_0^1(]-1, 1[)$ et une sous-suite (n') de (n) telle que $\varphi_{n'} \longrightarrow u\ \mathrm{H}^1$. Montrer que u est un point critique de I, et que $u \not\equiv 0$.