MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Le problème comporte trois parties ; la partie II s'appuie sur un résultat qui sera démontré dans la partie III

PARTIE I

Notations.

ℓ^2 est l'espace de Hilbert des suites $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ de complexes telles que $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$; il est muni de sa norme hilbertienne usuelle : $\|a\| = \left(\sum_0^\infty |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Z^+ est l'ensemble des entiers $\geqslant 1$; si A est une partie finie de Z^+, $|A|$ désigne le cardinal de A.

Si $a, b \in \ell^2$, $a * b = c$ (convolée des suites a et b) est par définition la suite $c = (c_n)_{n \geqslant 0}$ où :

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} a_i b_j .$$

Pour $E \subset Z^+$ on pose : $\lambda_N(E) = |E \cap [N, 2N]|$ $(N \in Z^+)$ et $\lambda(E) = \sup_{N \in Z^+} [\lambda_N(E)] \leqslant +\infty$.

E est dit lacunaire si $\lambda(E) < \infty$ (propriété arithmétique de E).

E est dit régulier si $a, b \in \ell^2 \Rightarrow (a * b)\, 1_E \in \ell^2$ (propriété analytique de E).

(Si $a * b = c$, $d = c 1_E$ est par définition la suite (d_n) avec $d_n = c_n$ si $n \in E$, 0 sinon.)

1. Donner un exemple de $a, b \in \ell^2$ telles que $a * b \notin \ell^2$.
   (*Indication :* on pourra prendre $a_n = b_n = (n+1)^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$ convenable.)

2. On suppose E régulier et on fixe $b \in \ell^2$.
   a. Montrer que L_b, définie par $L_b(a) = (a * b)\, 1_E$, est une application linéaire continue de ℓ^2 dans ℓ^2.
   (*Indication :* soit (a^i) une suite de ℓ^2; montrer que les deux hypothèses $a^i \to a$ et $L_b(a^i) \to a'$ (où a, a' sont des éléments donnés de ℓ^2) entraînant la conclusion $a' = L_b(a)$.)

   b. Montrer que $L_b(a) = L_a(b)\ \forall\, a, b \in \ell^2$ et en déduire que $\sup_{\|b\| \leqslant 1} \|L_b(a)\| < \infty \quad \forall\, a \in \ell^2$.

   c. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que :

   $$\forall\, a, b \in \ell^2 \qquad \|(a * b)\, 1_E\| \leqslant M \|a\| \, \|b\| .$$

   La meilleure constante M possible sera notée M (E).

3. Soit E un ensemble régulier ; montrer que E est lacunaire et que plus précisément :

   $$\lambda(E) \leqslant 4\,(M(E))^2 .$$

   (*Indication :* pour $N \in Z^+$ fixé, considérer a, b définies par $a = b$; $a_n = 1$ si $0 \leqslant n \leqslant 2N$, $a_n = 0$ sinon.)

Tournez la page S.V.P.

4. Soit E un ensemble lacunaire, a et $b \in \ell^2$ avec $\|a\| = \|b\| = 1$, $c = a * b$.

   a. Montrer que $c_n = \sum\limits_{\frac{n}{2} < i \leqslant n} a_i b_{n-i} + \sum\limits_{\frac{n}{2} \leqslant i \leqslant n} b_i a_{n-i}$.

   b. Montrer que $|c_n|^2 \leqslant 2 \left[\sum\limits_{\frac{n}{2} < i \leqslant n} |a_i|^2 + \sum\limits_{\frac{n}{2} \leqslant i \leqslant n} |b_i|^2 \right]$.

   c. Montrer que E est régulier et que plus précisément $M(E) \leqslant C\sqrt{\lambda(E)}$ où C est une constante numérique dont on indiquera une valeur possible.

   Ainsi, E régulier $\Leftrightarrow$ E lacunaire.

5. Un ensemble $F = \{\lambda_j\}_{j \geqslant 1} \subset Z^+$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \lambda_{j+1} \ldots$ est dit un ensemble de Hadamard si $\lambda_{j+1} \geqslant 2\lambda_j \quad \forall j \geqslant 1$. Pour $E \subset Z^+$, montrer l'équivalence des propriétés :
   i. E est lacunaire ;
   ii. E est réunion finie d'ensembles de Hadamard.

6. Soit $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ l'ensemble des termes de la suite de Fibonacci définie par $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ si $n \geqslant 1$. Montrer que E est lacunaire et calculer $\lambda(E)$.

PARTIE II

Notations : L^1 est l'ensemble des classes de fonctions complexes localement intégrables 2π-périodiques, muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt.$$

Pour $f \in L^1$ et $n \in Z$ on pose $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} \, dt$.

On définit de façon analogue L^2, muni de la norme : $\|f\|_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

On définit aussi pour $j = 1, 2$: $\quad H^j = \{f \in L^j ;\ \hat{f}(n) = 0 \ \ \forall n < 0\}$.

On admet dans cette partie le résultat fondamental suivant :

(*) $\forall f \in H^1$, $\exists\, g$ et $h \in H^2$ telles que $f = gh$ et $\|f\|_1 = \|g\|_2 \|h\|_2$.

1. Montrer que $\forall g \in H^2$, $\exists\, G \in H^2$ telle que :
   a. $\hat{G}(n) = |\hat{g}(n)| \ \forall n \in Z$;
   b. $\|G\|_2 = \|g\|_2$.

2. Soit $f \in H^1$; montrer qu'il existe $F \in H^1$ telle que :
   a. $|\hat{f}(n)| \leqslant \hat{F}(n) \ \forall n \in Z$;
   b. $\|F\|_1 \leqslant \|f\|_1$.
   [*Indication :* utiliser (*) .]

3. Soit a l'élément de L^1 défini par $a(t) = i(\pi - t)$ si $0 \leqslant t < 2\pi$.

   Montrer que $n \in Z^+ \Rightarrow \hat{a}(n) = \dfrac{1}{n}$.

4. Soient f, F comme dans la question 2.

   a. Montrer que $\sum_1^\infty \frac{\hat{F}(n)}{n} \leqslant \pi \|F\|_1$.

   b. Montrer que $\sum_1^\infty \frac{|\hat{f}(n)|}{n} \leqslant \pi \|f\|_1$.

5. Soit $E \subset Z^+$ un ensemble lacunaire et soit $f \in H^1$. Montrer que $\left(\sum_{n \in E} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{\lambda(E)}\,\|f\|_1$, où C est comme dans I.4.*c*.

6. On rappelle les propriétés du noyau de Féjer k_N ($N \in Z^+$) :

$$k_N(t) = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) e^{ijt} \quad \text{et} \quad k_N(t) \geqslant 0 \ \forall t.$$

À l'aide de $E = \{2^j\}_{j \geqslant 0}$ et de $f = k_N$, montrer que l'inégalité de la question 5 n'est pas valable en général pour les fonctions de L^1.

PARTIE III

On se propose de démontrer le résultat (*) de la partie II.

Notations.

w est une fonction positive de L^1.

$L^2(w)$ est l'espace de Hilbert des fonctions complexes f telles que $|f|^2 w \in L^1$, muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, w(t) \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $n \in Z$, e_n est la fonction définie par $e_n(x) = e^{inx}$.

V est l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n>0}$. $\bar{V}$ est l'adhérence de V dans $L^2(w)$.

W est l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n \neq 0}$.

$W_r = \{R \in W;\ R = \bar{R}\}$.

1. *a.* Montrer que $f \in \bar{V}$ et $n > 0$ entraînent : $e_n f \in \bar{V}$.

   b. Montrer que $R \in W_r \Leftrightarrow R = P + \bar{P}$ avec $P \in V$.

2. *a.* Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \bar{V}$ tel que :

$$\|1 + \varphi\|_{L^2(w)} = \inf_{P \in V} \|1 + P\|_{L^2(w)}.$$

   b. Si $\phi = 1 + \varphi$, montrer les deux égalités suivantes :

$$(**) \quad \int_0^{2\pi} (\bar{\phi} e_n w)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si} \quad n > 0.$$

$$(***) \quad \int_0^{2\pi} (|\phi|^2 e_n)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si} \quad n > 0.$$

   c. En déduire qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que $(|\phi|^2 w)(t) = c^2 \quad dt$ presque partout.

Tournez la page S.V.P.

3. *a.* On supose que la constante c de la question précédente est > 0 et on pose $h = \dfrac{1}{\phi}$; montrer que $h \in \mathrm{H}^2$. [*Indication :* utiliser (**).]

   b. Montrer que $\mathrm{P} \in \mathrm{V} \Rightarrow c^2\, \widehat{h}\,(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} [(1 + \mathrm{P})\,\overline{\phi}\, w]\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$ puis que $\widehat{h}\,(0) = 1$.

   Dans la suite de III, on aura besoin de la notation suivante :

   $$\|u\|_0 = \exp\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{Ln}\,(|u(t)|)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right] \qquad (\text{où } u \in \mathrm{L}^1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ln} \text{ est le logarithme népérien}).$$

   (On a $0 \leqslant \|u\|_0 < \infty$).

4. *a.* Montrer que $\|u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \qquad \forall u \in \mathrm{L}^1$.

   b. Montrer que si u, v, uv sont dans L^1 : $\|uv\|_0 = \|u\|_0\, \|v\|_0$.

   c. Soit $\mathrm{R} \in \mathrm{W}_r$; montrer que $\|w\|_0 \leqslant \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{R}(t)}\, w(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$.

   d. On suppose $\mathrm{Ln}\, w \in \mathrm{L}^1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\mathrm{Ln}\, w)\,(t)\,\mathrm{d}t = 0$; montrer qu'il existe une suite g_n de fonctions réelles, bornées et d'intégrale nulle sur $[0,\ 2\pi]$ par rapport à $\mathrm{d}t$, telles que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{g_n(t)}\, w(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \to 1$.

   e. Pour n fixé, on pose $\mathrm{R}_\mathrm{N} = k_\mathrm{N} * g_n$; montrer que $\mathrm{R}_\mathrm{N} \in \mathrm{W}_r$ et que :

   $$\lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{P}_{\mathrm{N}_j}(t)}\, w(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{g_n(t)}\, w(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

   où (N_j) est une sous-suite convenable de la suite des entiers $\geqslant 1$.

   f. Montrer qu'on a toujours (c'est-à-dire même si $\mathrm{Ln}\, w \notin \mathrm{L}^1$) :

   $$\|w\|_0 = \inf_{\mathrm{R}\in \mathrm{W}_r} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{R}(t)}\, w(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

5. *a.* Montrer que $\|w\|_0 = \inf\limits_{\mathrm{P}\in\mathrm{V}} \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} (|e^{\mathrm{P}}|^2\, w)\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right]$.

   b. Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$, il existe une suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant 1}$ de V avec $1 + \mathrm{Q}_n \to e^{\mathrm{P}}$ uniformément sur $[0,\ 2\pi]$ et en déduire que :

   $$\|w\|_0 \geqslant \inf_{\mathrm{Q}\in\mathrm{V}} \int_0^{2\pi} (|1 + \mathrm{Q}|^2\, w)\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

   puis que $\|\, |1 + \mathrm{P}|^2 \|_0 \geqslant 1 \quad \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{V}$.

   c. Montrer que $\|w\|_0 = \inf\limits_{\mathrm{Q}\in\mathrm{V}} \displaystyle\int_0^{2\pi} (|1 + \mathrm{Q}|^2\, w)\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$.

6. Soit $f \in \mathrm{H}^1$.

   a. Montrer que $\mathrm{Q} \in \mathrm{V} \Rightarrow |\widehat{f}\,(0)|^2 \leqslant \displaystyle\int_0^{2\pi} (|1 + \mathrm{Q}|^2\, |f|^2)\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$.

   b. Montrer que $|\widehat{f}\,(0)| \leqslant \|f\|_0$.

   c. Montrer que $f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_0 > 0$.

7. Soit $f \in \mathrm{H}^1$, $f \neq 0$ et soit $w = |f|$.

   a. Montrer que la constante c de la question III.3.*a.* est > 0. Avec les notations de cette question, on pose :

   $$\alpha = ch \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{f}{\alpha}.$$

   b. Montrer qu'il existe une suite Q_n de V telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (|\phi f - (1 + \mathrm{Q}_n) f|)\,(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \to 0$ et en déduire que $\phi f \in \mathrm{H}^1$.

   c. Conclure : $f = \alpha\beta$; α et β sont dans H^2 ; et $\|\alpha\|_2\, \|\beta\|_2 = \|f\|_1$.