ÉPREUVE A

L'épreuve est constituée d'un problème comportant quatre parties. Chaque partie peut être traitée indépendamment à condition d'admettre les résultats des parties précédentes. Le préambule comprend un certain nombre de résultats qui sont à admettre sans démonstration.

Les candidats porteront le numéro de chaque question traitée sans recopier le texte de la question. *La rigueur sera un élément important pour l'évaluation des démonstrations.*

Préambule. — On rappelle qu'un espace de Hilbert H est un espace vectoriel sur **R** muni d'un produit scalaire, noté $(.\,,\,.)$, qui est *complet* pour la norme associée à ce produit scalaire. On note $|x| = (x, x)^{1/2}$.

On désigne par $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ l'ensemble des applications linéaires et continues de H dans H et on note par $\|.\|_{\mathrm{H}}$ la norme sur $\mathscr{L}(\mathrm{H})$:

$$\|\mathrm{L}\|_{\mathrm{H}} = \mathrm{Sup}\ \{|\mathrm{L}x|,\quad |x| = 1,\ x \in \mathrm{H}\}.$$

On admettra (sans démonstration) que la boule unité fermée :

$$\overline{\mathrm{B}}(0, 1) = \{x \in \mathrm{H},\quad |x| \leqslant 1\}$$

est un compact de H si et seulement si H est de dimension finie.

On désigne par $\mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$ le sous-espace de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ formé par les applications *compactes,* c'est-à-dire que $\mathrm{L}(\overline{\mathrm{B}}(0, 1))$ est d'adhérence compacte dans H pour $\mathrm{L} \in \mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$.

On désigne par $\mathscr{L}^{\circ}(\mathrm{H})$ le sous-espace de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ formé par les applications de rang fini, c'est-à-dire que $\mathrm{L} \in \mathscr{L}^{\circ}(\mathrm{H})$ lorsque $\mathrm{L}(\mathrm{H})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans ce problème, on ne considère que des espaces de Hilbert *séparables,* c'est-à-dire qu'il existe une partie *dénombrable* qui est dense dans H. On admettra alors qu'un sous-ensemble A de H est l'adhérence compacte dans H si et seulement si l'une des deux propriétés (K1) ou (K2) ci-dessous est vérifiée.

(K1) De toute suite de points de A, il est possible d'extraire une sous-suite convergente dans H.

(K2) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon ε. C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}) \in \mathrm{H}^{\mathrm{N}},\quad \mathrm{A} \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{B}}(x_i, \varepsilon)$.

I. Opérateurs compacts

I.1. Montrer que $\mathscr{L}^{\circ}(\mathrm{H}) \subset \mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$.

I.2. Montrer que, si H est de dimension finie, $\mathscr{L}(\mathrm{H}) = \mathscr{L}^{\circ}(\mathrm{H}) = \mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$.

I.3. Montrer que, si $\mathrm{L} \in \mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$, alors $\mathrm{M} \circ \mathrm{L}$ et $\mathrm{L} \circ \mathrm{M}$ appartiennent à $\mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$.

I.4. Montrer que $\mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$ est fermé dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$, c'est-à-dire que, si $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$ qui converge vers L dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$, alors $\mathrm{L} \in \mathscr{L}^{\mathrm{C}}(\mathrm{H})$ [on pourra utiliser (K2) pour montrer que $\mathrm{L}(\overline{\mathrm{B}}(0, 1))$ est d'adhérence compacte dans H].

Tournez la page S.V.P.

I.5. On désire montrer que $\mathscr{L}^\circ(H)$ est dense dans $\mathscr{L}^C(H)$. À cet effet, on se donne $L \in \mathscr{L}^C(H)$ et $\varepsilon > 0$.

a. **Montrer qu'il existe une suite finie $y_1, \ldots, y_N$ d'éléments de H telle que :**

$$\forall x \in \overline{B}(0, 1), \quad \exists\, i \in \{1, \ldots, N\} \quad \text{tel que } |Lx - y_i| \leqslant \varepsilon.$$

b. Soit V l'espace vectoriel engendré par les $\{y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$. **On note par P la projection orthogonale dans H sur V, c'est-à-dire que, pour tout $z \in H$, $Pz \in V$ et**

$$\forall y \in V, \quad |z - Pz| \leqslant |z - y|.$$

Montrer que $N = P \circ L$ vérifie $\|L - N\|_H \leqslant \varepsilon$.

c. **Conclure que $\mathscr{L}^\circ(H)$ est dense dans $\mathscr{L}^C(H)$.**

I.6. On rappelle que l'adjoint de $L \in \mathscr{L}(H)$, noté ${}^tL$, est l'élément de $\mathscr{L}(H)$ qui vérifie :

$$\forall x \in H, \forall y \in H, \quad ({}^tLx, y) = (x, Ly);$$

et que l'application de $\mathscr{L}(H)$ dans $\mathscr{L}(H)$ qui fait correspondre à L son adjoint ${}^tL$ est linéaire et conserve la norme $\|{}^tL\|_H = \|L\|_H$.

Montrer que si $L \in \mathscr{L}^C(H)$ alors ${}^tL \in \mathscr{L}^C(H)$.

II. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

On rappelle que tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes et qu'une base hilbertienne est une famille dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ (l'ensemble I est dénombrable) qui vérifie :

(i)
$$(e_p, e_q) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = q, \\ 0 \text{ si } p \neq q, \end{cases}$$

(ii) l'espace vectoriel engendré par les (e_i) est dense dans H.

On dit que $L \in \mathscr{L}(H)$ est de Hilbert-Schmidt, et on note $L \in HS(H)$, s'il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$ de H telle que la série de terme général $(|Le_i|^2)_{i \in I}$ est convergente dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{i \in I} |Le_i|^2 < \infty.$$

On note alors :

$$\|L\|_{HS} = \left(\sum_{i \in I} |Le_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra toujours considérer que $I = \mathbb{N}$ et que H est de *dimension infinie dans ce qui suit.*

II.1. Montrer que l'espace HS (H) et l'application $\| \quad \|_{HS}$ sont indépendants de la base hilbertienne choisie.

II.2. Montrer que HS (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H)$ et que $\|.\|_{HS}$ y définit une norme.

II.3. Montrer que, pour tout $L \in HS(H)$, $\|L\|_H \leqslant \|L\|_{HS}$.

II.4. Montrer que, si $L \in HS(H)$ et $M \in \mathscr{L}(H)$, alors $L \circ M$ et $M \circ L$ appartiennent à HS (H) et

$$\|L \circ M\|_{HS} \leqslant \|L\|_{HS} \|M\|_H, \quad \|M \circ L\|_{HS} \leqslant \|L\|_{HS} \|M\|_H.$$

II.5. Montrer que, si $L \in HS(H)$ et $I + L$ est inversible, alors $(I + L)^{-1} - I \in HS(H)$. On a désigné par I l'application identique de H dans H.

II.6. *a.* **Montrer que $\mathscr{L}^\circ$ (H) $\subset$ HS (H).**

b. **Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est limite, pour la norme $\|.\|_{HS}$ d'opérateurs de rang fini.**

c. Montrer que HS (H) $\subset \mathscr{L}^C$ (H).

III. Théorie spectrale des opérateurs symétriques et compacts

III.1. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel invariant par L, alors $F^\perp$ est invariant par ${}^tL$.

III.2. Montrer que si ${}^tL = L$ alors :

$$\|L\|_H = \operatorname{Sup}\{|(Lx, x)|,\ x \in H,\ |x| = 1\},$$

on pourra écrire, pour $x \in H$ et $\lambda > 0$, l'identité :

$$4(L^2x, x) = 4|Lx|^2 = \left(L\left(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Lx\right),\ \lambda x + \frac{1}{\lambda}Lx\right) - \left(L\left(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Lx\right),\ \lambda x - \frac{1}{\lambda}Lx\right)$$

et majorer le membre de droite en utilisant :

$$S = \operatorname{Sup}\{|(Lx, x)|/|x|^2,\quad x \in H,\quad x \neq 0\};$$

puis choisir $\lambda = |Lx|/|x|$.

III.3. On désire montrer que, si ${}^tL = L$ et $L \in \mathscr{L}^C(H)$, alors $\|L\|_H$ ou $-\|L\|_H$ est valeur propre de L.

a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{B}(0, 1)$ telle que $|(Lx_n, x_n)|$ converge vers $\|L\|_H$.

Construire une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\overline{B}(0, 1)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} (Ly_n, y_n) = \ell \in \{\|L\|_H, -\|L\|_H\},$$

$$\lim_{n\to\infty} Ly_n = z.$$

b. Développer $|Ly_n - \ell y_n|^2$, puis montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} (Ly_n - \ell y_n) = 0.$$

c. En déduire que $\|L\|_H$ ou $-\|L\|_H$ est valeur propre de L.

d. Montrer que, si (λ, w) est un couple valeur propre-vecteur propre de L, alors $|\lambda| \leqslant \|L\|_H$. En déduire que la valeur propre de L de plus grand module (notée λ_0) vérifie $|\lambda_0| = \|L\|_H$.

III.4. On suppose toujours que ${}^tL = L$ et que $L \in \mathscr{L}^C(H)$. L'objet de cette question est de construire une suite de couples (λ_n, w_n), $n \in \mathbb{N}$, tels que les propriétés (1) à (4) ci-dessous soient remplies :

(1) $\quad |\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n-1}| \leqslant \dots \leqslant |\lambda_0|$,

(2) $\quad Lw_i = \lambda_i w_i,\quad w_i \neq 0$,

(3) $\quad (w_i, w_j) = \delta_{ij}$,

(4) $\quad$ soit $H_n = \{x \in H$ tel que $(x, w_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, n\}$, alors, $\forall x \in H_n$, $|Lx| \leqslant |\lambda_{n+1}|\,|x|$.

a. Montrer que w_0 peut être construit et que H_0 est invariant par L.

b. Montrer que la restriction de L à H_0, notée L_0, vérifie dans H_0 : ${}^tL_0 = L_0$ et $L_0 \in \mathscr{L}^C(H_0)$. En déduire la construction de (λ_1, w_1).

c. Montrer que la construction de la suite (λ_n, w_n) vérifiant (1) à (4) est possible.

d. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini (remarquer que si : $\lambda_n \neq 0$, $w_n = L\dfrac{w_n}{\lambda_n}$ ne peut contenir de sous-suite convergente).

Tournez la page S.V.P.

III.5. Soit $L \in \mathscr{L}^C(H)$ avec ${}^tL = L$ et $(\lambda_n,\ w_n)$ la suite précédemment construite. Pour $x \in H$, on note :

$$x_n = x - \sum_{i=0}^{n} (x,\ w_i)\, w_i .$$

a. **Montrer que $|Lx_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|\,|x_n|$.**

b. **Montrer que la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} (Lx,\ w_i)\, w_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H vers Lx (on pourra remarquer que :**

$$|x_n|^2 = |x|^2 - \sum_{i=0}^{n} |(x,\ w_i)|^2 \leqslant |x|^2).$$

c. **En déduire que $Lx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x,\ w_i)\, w_i$.**

III.6. Montrer que toute valeur propre non nulle d'un opérateur compact est de multiplicité finie, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, le noyau de $L - \lambda I$ est de dimension finie.

IV. Un opérateur intégral

Dans cette partie, on particularise l'analyse précédente en se plaçant dans $H = L^2(0, 2\pi)$, que l'on munit du produit scalaire et de la norme usuels :

$$(f,\, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t, \quad |f| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

IV.1. On note f_n, pour $n \in \mathbb{N}$, l'élément de H défini comme suit : pour $x \in [0,\ 2\pi]$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$f_{2p}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin px, \quad f_{2p+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos px.$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$.

IV.2. Montrer que $(f_{n,\,m})_{(n,\,m)\in\mathbb{N}^2}$ avec :

$$f_{n,\,m}(x,\, y) = f_n(x)\, f_n(y), \quad (x,\, y) \in [0,\ 2\pi]^2$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\,]0,\ 2\pi\,[\, \times\,]\,0,\ 2\pi[\,)$.

IV.3. Soit $k \in L^2(\,]0,\ 2\pi\,[\, \times\,]\,0,\ 2\pi[\,)$. On note :

$$\|k\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k^2(x,\, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}.$$

a. Montrer que $h : [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \left(\int_0^{2\pi} k^2(x,\, y)\, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0,\ 2\pi],$$

appartient à $L^2(0,\ 2\pi)$ et que $|h|^2 = \|k\|_2^2$.

b. À toute fonction $f \in L^2(0,\ 2\pi)$, on associe la fonction $Kf : [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(Kf)(y) = \int_0^{2\pi} k(x,\, y)\; f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $|Kf| \leqslant \|k\|_2 |f|$. En déduire (brièvement) que $K \in \mathscr{L}(H)$.

IV.4. **On écrit** $k(x, y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} k_{n,m} f_{n,m}(x, y)$.

Montrer que :

$$\|k\|_2^2 = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} k_{n,m}^2 .$$

IV.5. *a.* **Calculer** $|\mathrm{K}f_n|$ **en fonction des** $(k_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$.

b. **En déduire que K est de Hilbert-Schmidt et calculer** $\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{HS}}$ **en fonction de** $\|k\|_2$.

IV.6. **On suppose dans la suite du problème que** $k(x, y) = k(y, x)$ **pour presque tout** $(x, y) \in]0, 2\pi[^2$.
Montrer que ${}^t\mathrm{K} = \mathrm{K}$ **et en déduire l'existence d'une suite** (λ_n, w_n) **vérifiant les points (1) à (4) de la question III.4.**

IV.7. Montrer que le développement de la question III.5.*c.* s'écrit ici :

$$(\mathrm{K}f)(y) = \sum_{=0}^{\infty} \lambda_i \left(\int_0^{2\pi} f(x)\, w_i(x)\, \mathrm{d}x \right) w_i(y)$$

(préciser dans quel sens).

IV.8. On suppose dorénavant que la fonction k est *continue* sur $[0, 2\pi]^2$. Montrer, que pour $\lambda_i \neq 0$, la fonction w_i est continue.

IV.9. *a.* On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n \geqslant 0$. On note alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$k_n(x, y) = k(x, y) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, w_i(x)\, w_j(y).$$

Montrer que k_n est continue et que, pour toute fonction :

$$f \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi), \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(x, y)\, f(y)\, f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geqslant 0.$$

b. En déduire que $k_n(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

IV.10. Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la série à termes positifs $(\Sigma\, \lambda_i\, w_i^2(x))$ est convergente et que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, w_i^2(x) \leqslant k(x, x).$$

IV.11. Soit M le maximum de $k(x, x)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$,

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i\, w_i(x)\, w_i(y) \right|^2 \leqslant \mathrm{M} \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i\, w_i^2(x).$$

En déduire que, pour tout x fixé, la série de fonctions $(\Sigma\, \lambda_i\, w_i(x)\, w_i)$ converge uniformément vers la fonction $\ell(x, .)$ sur $[0, 2\pi]$ où pour $y \in [0, 2\pi]$:

$$\ell(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, w_i(x)\, w_i(y).$$

Tournez la page S.V.P.

IV.12. *a.* Montrer que, pour toute fonction continue f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \ell(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, w_i(x) \int_0^{2\pi} f(y)\, w_i(y)\, \mathrm{d}y.$$

b. En déduire que, pour toute fonction f, continue sur $[0, 2\pi]$, et pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^{2\pi} (\ell(x, y) - k(x, y))\, f(y)\, \mathrm{d}y = 0.$$

c. Montrer que $\ell(x, y) = k(x, y)$ et en déduire que $\ell(x, x) = k(x, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, w_i^2(x)$.

d. Montrer que la série de fonctions $(\Sigma\, \lambda_i\, w_i^2)$ converge *uniformément* sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction $x \longmapsto \ell(x, x)$.

IV.13. En utilisant l'inégalité :

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i\, w_i(x)\, w_i(y) \right|^2 \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i\, w_i^2(x) \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i\, w_i^2(y),$$

montrer que le développement de la question IV.7. est valable, au sens de la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$.