Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

*L'épreuve est composée de deux parties indépendantes, qui compteront chacune pour une part égale de la note totale. Merci de veiller à **traiter chaque partie sur une copie séparée**, en identifiant bien la partie à laquelle elle correspond.*

Le sujet comprend 8 pages.

⋆ ⋆ ⋆

Partie 1 – ALGEBRE

Borne sur les coefficients d'un diviseur d'un polynôme

- Notations

- Si A est un anneau, on note $A[X]$ l'ensemble des polynômes univariés à coefficients dans A.
- On note $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
- Si p est un nombre premier, on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- On dit qu'un élément $a \in \mathbb{F}_p$ est un carré s'il existe $y \in \mathbb{F}_p$ tel que $a = y^2$.
- Soit A un anneau intègre. On dit qu'un polynôme non nul $P \in A[X]$ est *irréductible* s'il n'est pas inversible et si, lorsque $P = Q_1 Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in A[X]$, alors Q_1 ou Q_2 est un inversible de $A[X]$. On dit que P est *réductible* s'il n'est pas irréductible.
- Si m et n sont deux entiers positifs, on note $\binom{n}{m}$ le coefficient binomial $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ où $n!$ désigne la factorielle de n.
- Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On note

$$||P||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}$$

$$||P||_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

$$||P||_\infty = \max_{i=0}^{n}(|a_i|).$$

Si $z_1, \cdots, z_n$ désignent les racines complexes de P comptées avec multiplicité, on pose

$$M(P) = |a_n| \prod_{i=1}^{n} \max(1, |z_i|).$$

Par convention si $z \in \mathbb{C}$, alors $M(z) = |z|$.

I - Racines et réduction modulo p

1. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ qui possède une racine dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$.
2. Décrire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[X]$.
3. On note $\pi_p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ le morphisme d'anneaux canonique qui envoie un élément de $\mathbb{Z}$ sur sa réduction modulo p. Montrer que ce morphisme s'étend en un unique morphisme d'anneaux $\pi_{x,p} \colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ qui envoie x sur x.

   Dans la suite, si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on notera $[P]_p$ l'image de P par le morphisme $\pi_{x,p}$.

4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que si P possède une racine dans $\mathbb{Z}$ alors pour tout entier p premier, son image $[P]_p$ possède une racine dans $\mathbb{F}_p$.
5. Montrer qu'il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ sans racine dans $\mathbb{Z}$ mais tel que $[P]_2$ possède une racine dans $\mathbb{F}_2$.
6. On considère $H = (X^2+1)(X^2+3)(X^2-3)$. Montrer que ce polynôme n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.
7. Montrer que $[H]_2$ possède une racine dans $\mathbb{F}_2$.
8. On va montrer que H possède une racine dans $\mathbb{F}_p$ pour tout entier $p \neq 2$ premier.

   (a) Soit $p \neq 2$ un nombre premier. On considère deux applications du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^\times$ dans lui-même
   $$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{F}_p^\times & \to & \mathbb{F}_p^\times \\ & a & \mapsto & a^2 \end{array}$$
   et
   $$\begin{array}{cccc} \psi\colon & \mathbb{F}_p^\times & \to & \mathbb{F}_p^\times \\ & a & \mapsto & a^{\frac{p-1}{2}}. \end{array}$$
   Montrer qu'il s'agit de morphismes de groupes.

   (b) Soit $a \in \mathbb{F}_p$ tel que $a \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{-1, 1\}$ puis en déduire que $a^{\frac{p-1}{2}} \in \{-1, 1\}$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. En déduire qu'un élément $a \in \mathbb{F}_p$ non nul est un carré modulo p si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

   (e) En déduire que pour tout nombre premier $p \neq 2$, le polynôme H possède une racine modulo p. (*Indication* : On remarquera que le produit $(-1) \times (-3) \times 3$ est un carré modulo p, et on utilisera les questions précédentes.)

9. La réciproque de la question 4 est-elle vraie ?

II - Divisibilité et réduction modulo p

10. Soit p un nombre premier, qui ne divise pas a_n. Montrez que si P est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ alors il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
11. (a) Soit $G = X^4 + 1$. Montrez que G n'admet pas de racine dans $\mathbb{Z}$. En déduire que si G se factorise, il se factorise comme produit de deux polynômes de degré 2.
    (b) Calculer $G_1(X) = G(X+1)$. Expliquer pourquoi si G_1 se factorise, il se factorise sous la forme $G_1(X) = (aX^2 + bX + c)(a'X^2 + b'X + c')$.
    (c) Montrer que si $G_1(X) = (aX^2 + bX + c)(a'X^2 + b'X + c')$ alors c et c' sont divisibles par 2. En déduire que G_1 et donc G sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.
12. (a) Factorisez $X^4 + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

    Dans la suite p est un nombre premier impair.

    (b) Si -1 est un carré modulo p montrer que $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.
    (c) En utilisant les égalités $X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-1)^2 + 2X^2$, montrer que si 2 ou -2 est un carré modulo p alors $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.
    (d) Montrer que soit -1, soit 2, soit -2 est un carré modulo p. En déduire que $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

III - Majorer les coefficients d'un diviseur

Dans cette partie on se place dans le cas où $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_n \neq 0$.

13. Montrer que $M(P) \geqslant |a_n|$ et que pour $P, H \in \mathbb{C}[X]$, on a $M(PH) = M(P) \times M(H)$.
14. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$||(X-z)P||_2^2 = ||P||_2^2(1+|z|^2) - \sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}\overline{z a_i} + a_i z \overline{a_{i-1}}) = ||(\overline{z}X - 1)P||_2^2.$$

15. Soient $z_1, \cdots, z_n$ les racines complexes de P comptées avec multiplicité. Quitte à renuméroter les racines, on peut supposer que $|z_1|, \cdots, |z_k| > 1$ et $|z_{k+1}|, \cdots, |z_n| \leqslant 1$. On pose

$$G = a_n \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} (\overline{z_j}X - 1) \prod_{k < j \leqslant n} (X - z_j) = \sum_{i=0}^{n} g_i X^i.$$

    Par convention le produit sur l'ensemble vide vaut 1.

    (a) Montrer que $M(P)^2 = |g_n|^2 \leqslant ||G||_2^2$.
    (b) Si $k \geqslant 1$, montrer que

$$||G||_2 = ||\frac{G}{\overline{z_1}X - 1}(X - z_1)||_2$$

    (c) En déduire que $||G||_2 = ||P||_2$ puis que $M(P) \leqslant ||P||_2$

16. Montrer que
$$||P||_\infty \leqslant ||P||_2 \leqslant ||P||_1 \leqslant (n+1)||P||_\infty$$
et
$$||P||_2 \leqslant \sqrt{(n+1)}||P||_\infty.$$

Dans la suite, on considère $H = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ avec $b_m \neq 0$ tel que H divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

17. (a) Pour tout $i \in \{0, \cdots, m\}$, montrer que $|b_i| \leqslant \binom{m}{i} M(H)$.
    (b) En déduire que $||H||_1 \leqslant 2^m M(H)$.
    (c) Montrer que $M(H) \leqslant \frac{|b_m|}{|a_n|} M(P)$, en déduire que
$$||H||_2 \leqslant \frac{|b_m|}{|a_n|} 2^m ||P||_2.$$
    (d) Montrer que
$$||H||_\infty \leqslant \frac{|b_m|}{|a_n|} \sqrt{(n+1)} 2^m ||P||_\infty.$$
18. Si maintenant $P, H \in \mathbb{Z}[X]$ tels que H divise P dans $\mathbb{Z}[X]$, montrer que $\frac{|b_m|}{|a_n|} \leqslant 1$. Expliquer à l'aide de la question précédente comment une recherche exhaustive permet de calculer tous les diviseurs possibles de P.
19. Soit $P = X^6 + X^4 - 9X^2 - 9 \in \mathbb{Z}[X]$.
    (a) Montrer que les polynômes $X^2 + 1$ et $X^2 - 3$ sont des diviseurs de P. En déduire une factorisation de P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.
    (b) Pour chaque diviseur irréductible $H \in \mathbb{Z}[X]$ de P dans $\mathbb{Z}[X]$ calculer $||H||_\infty$ puis le comparer à $\sqrt{(n+1)} 2^n ||P||_\infty$.

⋆ ⋆ ⋆

Partie 2 – ANALYSE

Opérateurs compacts et analyse spectrale de l'opérateur de Hardy

I - Préliminaires sur la théorie des opérateurs compacts

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces de Banach (sur $\mathbb{R}$).

Rappels et notations

Définition I.1. *Soit $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est un opérateur borné si*

$$\sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

L'ensemble des opérateurs bornés de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
L'ensemble des opérateurs bornés de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\mathrm{Ker}\ T = \{x \in E\ ;\ T(x) = 0\}$ et $\mathrm{Im}\ T = \{T(x)\ ;\ x \in E\}$.

Proposition I.2. *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel que l'on munit de la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, \qquad \forall T \in \mathcal{L}(E, F).$$

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un espace de Banach.

On note $B_E = \{x \in E\ ;\ \|x\|_E < 1\}$ et pour $\mathcal{A} \subset F$, $\overline{\mathcal{A}}^F$ désigne l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Définition I.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est compact si*

$$\overline{T(B_E)}^F \text{ est compact dans } (F, \|\cdot\|_F).$$

L'ensemble des opérateurs compacts de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ est noté $\mathcal{K}(E, F)$.
L'ensemble des opérateurs compacts de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ est noté $\mathcal{K}(E)$.

Questions

1. Démontrer que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_E^{\mathbb{N}}$, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $(F, \|\cdot\|_F)$.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Démontrer que si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $R \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $R \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.
4. Démonter que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $R \in \mathcal{K}(F, G)$ alors $R \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.
5. On suppose dans cette question que F est de dimension finie. Démontrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $T \in \mathcal{K}(E, F)$.
6. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts, i.e. $T_k \in \mathcal{K}(E, F)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{L}(E, F)$, i.e. $\lim_{k\to+\infty} \|T_k - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_E^{\mathbb{N}}$.

(a) Démontrer qu'il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(T_1(x_{\varphi_1(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $(T_i(x_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_i(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

(c) On pose $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\phi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \varphi_n(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ϕ est strictement croissante et démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(T_k(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

(d) Démontrer que $(T(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

(e) Conclure.

II - Théorie spectrale des opérateurs compacts

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach.

Rappels et notations

On note $I : E \to E$, l'identité de E dans E, i.e. pour tout $x \in E$, $I(x) = x$.

Définition II.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*
L'ensemble résolvant de T, qu'on note $\rho(T)$ est défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ dans } E\}.$$

Le spectre, noté $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant T, i.e. $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T)$.
Un nombre réel λ est appelée valeur propre de T si Ker $(T-\lambda I) \neq \{0\}$. *Dans ce cas,* Ker $(T-\lambda I)$ *est appelé sous-espace propre associé à λ. L'ensemble des valeurs propres est noté $VP(T)$.*

Théorème II.2 (Théorème d'isomorphisme de Banach)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, bijectif de E dans E. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

Théorème II.3 (Théorème de point fixe de Banach)**.** *Soit $\Phi : E \to E$ une application strictement contractante, i.e.*

$$\exists 0 \leqslant k < 1,\ \forall x, y \in E,\ \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_E \leqslant k\,\|x - y\|_E\,.$$

Alors Φ admet un unique point fixe.

Théorème II.4 (Théorème de Riesz)**.** *On a l'équivalence : ($\overline{B_E}^E$ compact) $\Leftrightarrow$ (E de dimension finie).*

Questions

7. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \rho(T)$. Démontrer que $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.
8. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Vérifier que $VP(T) \subset \sigma(T)$.
9. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Démontrer que $VP(T) = \sigma(T)$.
10. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Démontrer que $I-T$ est bijective de E dans E et déterminer son inverse. *Indication : On pourra calculer $(I - T)(\sum_{k=0}^{N} T^k)$.*

11. Démontrer que $\mathcal{GL}(E) = \{T \in \mathcal{L}(E)\ ;\ T$ bijectif de E dans $E\}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. *Indication : On pourra se servir de l'identité $T + K = T(I + T^{-1}K)$ pour $K \in \mathcal{L}(E)$.*
12. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cette question est de démontrer que $\sigma(T)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$ et $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(E)}, \|T\|_{\mathcal{L}(E)}]$.
    (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$. En utilisant le Théorème II.3, démontrer par $T - \lambda I$ est bijective de E dans E.
    (b) En déduire que $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(E)}, \|T\|_{\mathcal{L}(E)}]$.
    (c) En utilisant la question 11, démontrer que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
    (d) Conclure.
13. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\overline{VP(T)}^{\mathbb{R}} \subset \sigma(T)$ où $\overline{VP(T)}^{\mathbb{R}}$ désigne l'adhérence de $VP(T)$ dans $\mathbb{R}$.
14. Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ avec E de dimension infinie. Démontrer que $0 \in \sigma(T)$. *Indication : Raisonner par l'absurde, si $0 \notin \sigma(T)$, démontrer que $I \in \mathcal{K}(E)$.*

Nous admettrons dans la suite le résultat suivant.

Théorème II.5. *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Un des trois cas suivants doit se produire : $\sigma(T) = \{0\}$ ou $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est un ensemble fini ou $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est une suite d'éléments convergeant vers 0.*

III - Analyse spectrale de l'opérateur de Hardy

Rappels et notations

Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles que l'on munit de la norme

$$\|u\|_E = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

Soit $F = C^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles que l'on munit de la norme

$$\|u\|_F = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |u'(t)|.$$

Soit $1 \leqslant p < \infty$. Soit $\mathcal{L}^p(]0,1[) = \{f :]0,1[\to \mathbb{R}$ borélienne ; $|f|^p$ intégrable sur $]0,1[\}$. On définit $G = L^p(]0,1[) = \mathcal{L}^p(]0,1[)/\text{égalité p.p.}$ que l'on munit de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_{]0,1[} |u(t)|^p\right)^{1/p}.$$

On rappelle les théorèmes suivants.

Théorème III.1 (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *L'espace vectoriel normé $(G, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.*

Théorème III.2 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([0,1])^{\mathbb{N}}$, i.e. une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On suppose que :*
1. ***(Borne)*** *$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leqslant M$,*
2. ***(Equicontinuité)*** *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (|x-y| \leqslant \delta) \Rightarrow (|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon)$.*

Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in C([0,1])$ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Questions

15. Vérifier que $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces de Banach.
    Se donnant $u \in E$, on définit la fonction Tu sur $[0,1]$ par

$$Tu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(t)dt & \text{si } x \in]0,1], \\ u(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

16. Démontrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.
17. Démontrer que $VP(T) =]0,1]$ et pour tout $\lambda \in]0,1]$, déterminer le sous-espace propre associé Ker $(T - \lambda I)$.
18. En déduire que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.
19. Est-ce que $T \in \mathcal{K}(E)$?
20. Montrer que $\iota_{F\to E}$, défini par

$$\iota_{F\to E} : \left| \begin{array}{lcl} (F, \|\cdot\|_F) & \to & (E, \|\cdot\|_E) \\ f & \mapsto & f, \end{array} \right.$$

    est un opérateur compact.
21. Montrer brièvement qu'on peut voir T, comme un opérateur borné de E dans G.
    On supposera à présent que $T \in \mathcal{L}(E,G)$.
22. On souhaite démontrer que $T \in \mathcal{K}(E,G)$.
    (a) Pour $\varepsilon > 0$, on considère $(T_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{x+\varepsilon}\int_0^x u(t)dt$. Démontrer que $T_\varepsilon \in \mathcal{K}(E,G)$.
    (b) Démontrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,G)} = 0$.
    (c) Conclure.

⋆ ⋆ ⋆