MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

Direction générale des ressources humaines

RAPPORT DU JURY

SESSION 2026

Concours : **Agrégation externe**

Section : **Mathématiques**

Rapport de jury présenté par : Johan Yebbou
inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche
président du jury

© https://www.devenirenseignant.gouv.fr

Table des matières

Introduction **4**

1 Déroulement du concours et statistiques **5**
1.1 Déroulement du concours . . . 5
1.1.1 Les épreuves et le calendrier 2026 . . . 5
1.1.2 Le programme . . . 6
1.1.3 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant . . . 6
1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2026 . . . 6
1.2.1 Commentaires généraux . . . 6
1.2.2 Données statistiques diverses . . . 12

2 Épreuves d'admissibilité **22**
Énoncés . . . 22
2.1 Épreuve de mathématiques générales . . . 22
2.1.1 Présentation du sujet . . . 22
2.1.2 Rédaction des copies . . . 23
2.1.3 Raisonnement . . . 24
2.1.4 Notions mathématiques . . . 26
2.1.5 Remarques particulières . . . 26
2.1.6 Corrigé . . . 30
2.2 Épreuve d'analyse et probabilités . . . 72
2.2.1 Présentation du sujet . . . 72
2.2.2 Remarques générales . . . 72
2.2.3 Commentaires sur certaines questions . . . 72
2.2.4 Corrigé . . . 73

3 Épreuves orales de leçons **108**
3.1 Liste des leçons . . . 108
3.2 Présentation des épreuves . . . 110
3.2.1 Première partie : présentation de la leçon . . . 112
3.2.2 Deuxième partie : le développement . . . 114
3.2.3 Troisième partie : questions et dialogue . . . 115
3.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie . . . 116
3.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités . . . 130

© https://www.devenirenseignant.gouv.fr

4 Épreuves orales de modélisation **142**
4.1 Présentation des épreuves de Modélisation . . . 142
4.1.1 Textes . . . 142
4.1.2 Période de préparation . . . 143
4.1.3 Période d'interrogation . . . 143
4.2 Recommandations du jury communes aux trois options . . . 145
4.2.1 Organisation de l'exposé . . . 145
4.2.2 Contenu de l'exposé . . . 145
4.2.3 Illustration informatique . . . 146
4.3 Option A : Probabilités et statistiques . . . 146
4.3.1 Généralités . . . 146
4.3.2 Recommandations spécifiques . . . 147
4.3.3 Mise en œuvre informatique . . . 148
4.4 Option B : Calcul scientifique . . . 149
4.4.1 Généralités . . . 149
4.4.2 Recommandations spécifiques . . . 149
4.4.3 Mise en œuvre informatique . . . 150
4.5 Option C : Algèbre et calcul formel . . . 151
4.5.1 Généralités . . . 151
4.5.2 Recommandations spécifiques . . . 151
4.5.3 Mise en œuvre informatique . . . 152

5 La bibliothèque de l'agrégation **153**
5.1 Liste des livres disponibles . . . 153
5.2 Bibliothèque numérique . . . 188

Introduction

Le présent rapport de jury répond à un double objectif : d'une part, rendre compte de la session écoulée, et d'autre part, contribuer à la préparation de la session à venir. Les lectrices et lecteurs y trouveront notamment :

- un bilan de la session 2026, qui présente, à l'aide de données statistiques, la physionomie d'ensemble des candidates et candidats ainsi que des admises et admis, tant du point de vue des profils que des performances ;
- une présentation de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et des principes qui fondent sa conception des différentes épreuves ;
- une description assortie d'un commentaire détaillé de chacune des épreuves, analysant les productions de la session écoulée et précisant les attentes du jury.

Ce rapport se veut un document de référence, à la fois informatif et pédagogique. Il est destiné aux futures candidates et aux futurs candidats afin de les accompagner dans leur préparation aux épreuves du concours. S'il mentionne les lacunes et insuffisances constatées et identifie les points sur lesquels des efforts particuliers sont nécessaires, il a avant tout pour finalité d'expliciter la nature des exigences du jury et de favoriser une meilleure compréhension des critères d'évaluation.

En formulant explicitement ses attentes, le jury s'engage sur la manière dont il apprécie les prestations. Il recommande en conséquence aux candidates et candidats, quels que soient leurs profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'accorder à ce rapport la plus grande attention et de se conformer aux indications qui y sont formulées.

Le site de l'agrégation externe de mathématiques est accessible à l'adresse `https://agreg.org`. Il fait l'objet de mises à jour régulières en fonction de l'actualité du concours. Les visiteuses et visiteurs peuvent y consulter des conseils, des liens de référence, des archives (notamment les sujets des épreuves écrites et leurs corrigés), ainsi que des informations pratiques relatives à la session à venir.

En particulier, les futures candidates et les futurs candidats peuvent y télécharger la `ClefAgreg`, qui leur permet de se familiariser avec l'environnement informatique utilisé lors de l'épreuve de modélisation. Cette épreuve, fondée sur l'étude d'un texte et comportant la production d'illustrations informatiques, présente un caractère spécifique ; une préparation anticipée est indispensable pour en maîtriser les exigences. Elle permet en outre de développer des capacités de synthèse et de mobilisation des connaissances sur l'ensemble du programme.

Le site permet également d'accéder à une série de vidéos réalisées par le jury, qui présentent le déroulement des épreuves de leçons et en précisent les attendus.

Enfin, une réunion avec les préparatrices et préparateurs est traditionnellement organisée en début d'année universitaire, désormais sous l'égide de la Société mathématique de France et de la Société de mathématiques appliquées et industrielles, afin de présenter le bilan de la session écoulée et les perspectives du concours. Cette réunion est publique et ouverte à l'ensemble des universitaires intervenant dans la préparation au concours, quels que soient leurs établissements d'appartenance. Elle s'est tenue cette année le vendredi 16 octobre, avant la publication du présent rapport. Le jury remercie les préparatrices et préparateurs pour la qualité de ces échanges et pour leur engagement auprès des candidates et candidats.

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours

1.1.1 Les épreuves et le calendrier 2026

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse et probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, modélisation. Les candidates et candidats ont eu le choix parmi trois options :

— probabilités et statistiques ;

— calcul scientifique ;

— algèbre et calcul formel.

Elles ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2026 se sont déroulées

— le jeudi 5 mars 2026 pour l'épreuve de mathématiques générales ;

— le vendredi 6 mars 2026 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La liste d'admissibilité a été publiée le jeudi 7 mai 2026. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques du Maroc et de la Tunisie. La délibération du jury d'admissibilité est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du samedi 20 juin au mercredi 1er juillet 2026. La liste d'admission a été publiée le vendredi 3 juillet 2026.

Le déroulement et l'organisation d'un concours qui soumet 555 candidates et candidats admissibles à trois épreuves orales, avec des options variées et une infrastructure informatique complexe, sont une mécanique de précision, astreinte de surcroît à des exigences exceptionnelles de rigueur et d'égalité de traitement. Leur réussite repose sur l'engagement des équipes de l'établissement et du rectorat qui en ont la charge. L'organisation du concours au lycée Kléber, dans l'académie de Strasbourg, s'est faite avec la meilleure volonté et le dévouement de tous : le personnel du lycée Kléber, qui a accueilli les épreuves orales, et le personnel du rectorat de l'académie de Strasbourg ont offert au jury et aux candidates et candidats des conditions de travail excellentes et ont assuré une organisation performante, avec beaucoup de gentillesse et de patience. Ce rapport est l'occasion de transmettre à monsieur le Recteur, à madame la Proviseure et à monsieur le Secrétaire général du lycée Kléber, au personnel de la division des examens et concours (DEC) du rectorat et à tous les appariteurs les plus chaleureux remerciements du jury ; il relaie les nombreux messages de reconnaissance exprimés par les candidates et candidats pour la qualité de l'accueil qu'ils ont reçu.

1.1.2 Le programme

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeures et professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre à la professeure ou au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel du ministère de l'Éducation nationale, https://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme 2027 est identique au programme 2026.

Ce programme résulte d'un compromis, et des résultats mathématiques « importants » n'y figurent pas. Il est tout à fait possible que des candidates ou candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

1.1.3 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant

Le jury conseille aux candidates et candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière, auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours.

Le site https://agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage, et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés, qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2026

1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts est de 300 en 2026 contre 345 en 2025. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidates et candidats titulaires d'un doctorat. Huit postes étaient ouverts à ce titre, contre dix en 2025. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celles du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Concours externe	457	467	457	381	391	387	383	364	385	365	345	300
Concours spécial			15	16	16	16	16	16	15	15	10	8

Un total de 2537 candidats se sont inscrits aux épreuves écrites : 2189 pour l'agrégation française et 348 pour les agrégations marocaine et tunisienne.

Parmi les 2189 inscrits sur le concours français, seuls 1093 ont participé à au moins une des deux épreuves écrites. On compte environ 3,6 présents par poste.

Le nombre de candidates et candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser a drastiquement diminué dans les vingt dernières années. Sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidates et candidats relevant d'autres catégories, la faiblesse du nombre d'étudiantes et d'étudiants attirés par ce concours reste une source d'inquiétude pour le jury et plus largement pour toute la communauté éducative.

Admissibilité

Le jury a déclaré admissibles 559 candidates et candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (mathématiques générales et analyse et probabilités). Quatre ont été radiés faute d'avoir fourni les justificatifs nécessaires à leur inscription, ce qui porte à 555 le nombre d'admissibles, dont un candidat admis à titre étranger. Les statistiques des notes de l'écrit portent sur ces 555 admissibles ; les autres tableaux de ce rapport portent sur 554 admissibles, le candidat admis à titre étranger n'y étant pas pris en compte. Le premier admissible a obtenu un total d'écrit de 155 sur 160, avec 20/20 en mathématiques générales et 18,75/20 en analyse et probabilités ; le dernier admissible a un total de 40 sur 160, soit une moyenne de 5/20. Ce seuil de 5/20 est égal à celui des années passées.

Le jury invite toutes les candidates et tous les candidats admissibles à se présenter aux épreuves orales et à s'y engager pleinement : un score modeste à l'écrit peut être compensé par des qualités techniques et pédagogiques constatées pendant les épreuves orales.

Certaines candidates ou certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les reçus, 94 candidates et candidats avaient une moyenne d'écrit inférieure ou égale à 8/20.

Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts. Les Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes ne jugent pas opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidates et candidats admissibles.

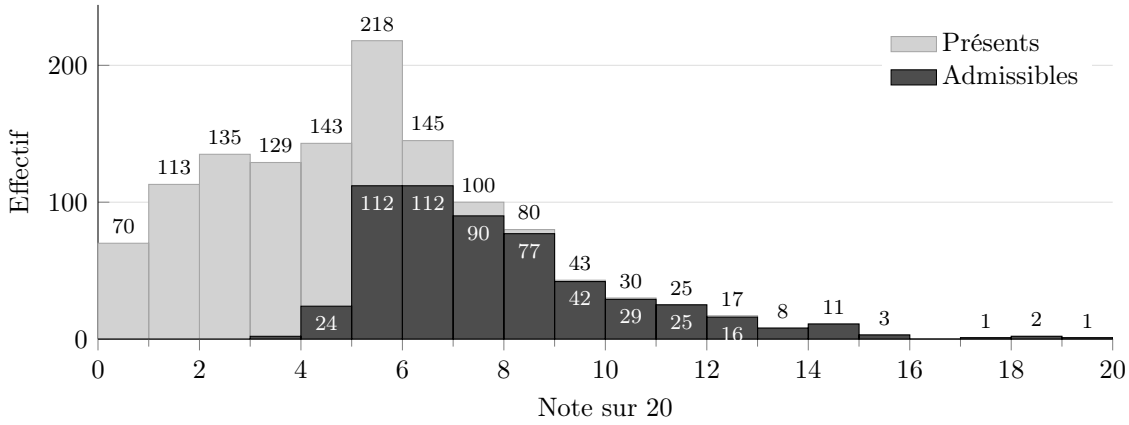
La conception des sujets est guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. Chacun des sujets propose des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Les deux sujets, de conceptions indépendantes, ont conduit à des prestations qui manifestent les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

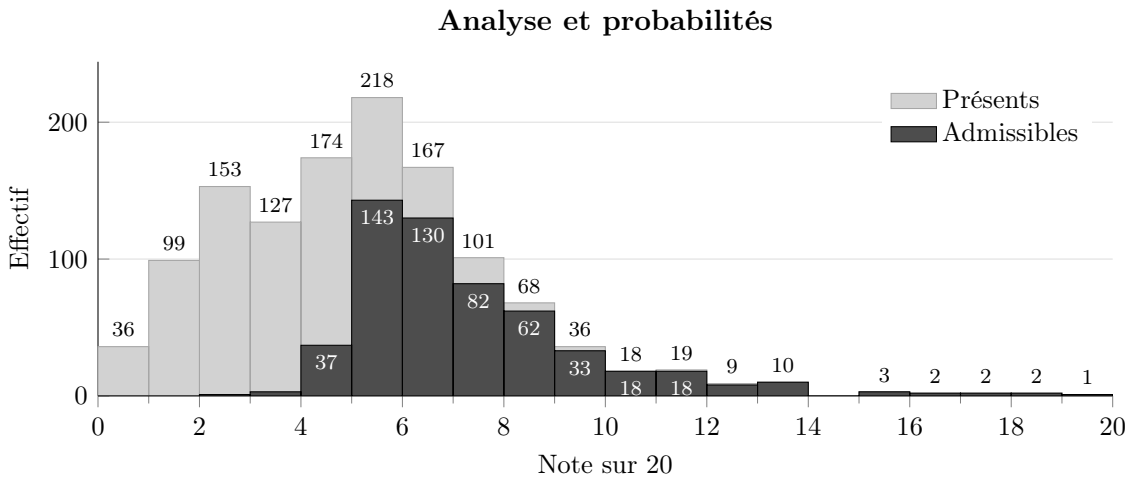
— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction (présentation, orthographe, clarté de l'expression...). Un item spécifique du barème valorise cette compétence.

— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de l'argumentation. Il valorise la maîtrise des techniques usuelles de raisonnement (par exemple, la formalisation des raisonnements par récurrence ou par contraposée). Les erreurs de logique grossières sont pénalisées.

— Une forte proportion de candidates et candidats a manqué de méthodes pour une rédaction efficace. Plus que la technicité, c'est davantage le volume abordé qui les a départagés.

Mathématiques générales





Répartition des notes des épreuves écrites

Présents : copies notées à chaque épreuve (1274 en mathématiques générales, 1245 en analyse et probabilités), y compris celles des candidates et candidats aux agrégations marocaine et tunisienne ; admissibles : les 555 admissibles du concours français.

Les deux épreuves écrites ont donné des résultats très homogènes ; effectifs, moyennes et écarts-types des présents et des admissibles sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Présents			Admissibles		
Épreuve	Effectif	Moyenne	Écart-type	Effectif	Moyenne	Écart-type
Mathématiques générales	1274	5,22	3,09	555	7,72	2,53
Analyse et probabilités	1245	5,16	2,82	555	7,25	2,40

Moyennes et écarts-types (notes sur 20) aux épreuves écrites

Présents : copies notées à chaque épreuve, y compris celles des candidates et candidats aux agrégations marocaine et tunisienne ; admissibles : concours français.

Oraux

Convocations. En 2026, la procédure de convocation aux épreuves d'admission s'est déroulée en plusieurs temps. Les candidates et candidats admissibles ont d'abord reçu par courriel une convocation — dite « convocation administrative » — qui indiquait les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, sans en préciser les horaires. Pour connaître leurs heures d'interrogation, les candidates et candidats ont dû ensuite se connecter sur le site de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure avait pour objectif de s'assurer de leur volonté de participer aux épreuves. Il leur a alors été indiqué une heure de convocation pour le premier jour d'épreuve, ainsi que l'heure la plus tardive à laquelle ils seraient libérés à l'issue de leur troisième épreuve. Les horaires des deux épreuves suivantes ont été précisés à chaque candidat la veille, à l'issue de l'épreuve précédente. Cette méthode d'attribution « à la volée » des horaires de convocation avait été mise en place en raison du nombre important de candidates et candidats admissibles qui ne se présentaient pas aux épreuves orales après s'être pourtant engagés à le faire.

L'application permettant d'obtenir cette convocation détaillée a été fermée, comme les années précédentes, quelques jours avant le début des oraux. Les candidates et candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6 h 30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Pour la session 2027, le jury envisage un fonctionnement différent : les candidates et candidats admissibles seraient convoqués sur les lieux du concours en fin d'après-midi, la veille de leur première épreuve. Ce rendez-vous permettrait de les accueillir, de leur présenter le déroulement des épreuves et de les informer sur le concours et sur la carrière de professeur agrégé ; leurs horaires d'interrogation leur seraient communiqués à cette occasion. Il répondrait plus efficacement que la procédure actuelle à la question des absences, dont la gestion de dernière minute reste complexe : les présences étant constatées la veille, les horaires pourraient être fixés en connaissance de cause. Les candidates et candidats admissibles seront informés en temps utile, notamment sur le site de l'agrégation, des modalités retenues.

Fraude. Le jury a un devoir de vigilance aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, livres comportant des ajouts manuscrits significatifs etc. sont aussi prohibés [1]. Les livres apportés par les candidates et candidats ne doivent pas être annotés.

Conditions de passage des oraux. Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession, etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des comparaisons statistiques sont faites très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidates et candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes leurs connaissances, leur travail de préparation et les aspects positifs de leurs prestations.

Conditions matérielles. Les épreuves d'admission se sont déroulées pendant une période de forte chaleur ; des ventilateurs ont été installés et de l'eau mise à la disposition des candidates et candidats. Le jury rappelle qu'aucune tenue particulière n'est attendue : une tenue légère est tout à fait appropriée.

Auditeurs. Les oraux 2026 ont été accessibles aux auditeurs de façon contingentée. Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidates et candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite très fortement les futures candidates, les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que bénéfique. Une attitude correcte est exigée des visiteuses et visiteurs. En particulier, les téléphones portables doivent être éteints. L'accès aux salles d'interrogation pourrait ne pas être autorisé à une auditrice ou un auditeur dont le comportement serait susceptible de perturber l'interrogation.

Résultats

À l'issue des épreuves orales, 232 candidates et candidats ont été déclarés admis pour 300 postes ouverts ; le premier admis a eu une moyenne de 19,65/20 (total de 393 sur 400), le dernier admis une moyenne de 8,1/20 (total de 162 sur 400).

Ce résultat est la marque de la stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015. Compte tenu du relativement faible nombre de candidates et candidats issus des préparations

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'accueil des candidates et candidats et leur permet de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel dans les salles de préparation peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait pas de concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidates et candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidates ou candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de leur préparation et ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles.

Le jury insiste sur l'importance de passer toutes les épreuves. Une prestation décevante n'est pas rédhibitoire : des candidates et candidats ont été admis avec une note de 4/20 en algèbre et géométrie ou en modélisation, ou de 5/20 en analyse et probabilités. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidates et candidats qui étaient en position d'être reçus. Le stress, les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidates et candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral et des admis sur les différentes épreuves orales sont résumés dans le tableau ci-dessous ; pour l'épreuve de modélisation, les résultats sont également détaillés par option.

	Admissibles	Présents			Admis		
Épreuve	Effectif	Effectif	Moyenne	Écart-type	Effectif	Moyenne	Écart-type
Algèbre et géométrie	554	457	9,13	5,32	232	13,05	4,00
Analyse et probabilités	554	457	9,98	4,92	232	13,61	3,40
Modélisation (toutes options)	554	457	9,31	4,66	232	12,51	3,85
Option A	237	202	8,76	4,11	96	11,61	3,71
Option B	149	117	9,48	5,20	59	13,23	3,87
Option C	168	138	9,96	4,84	77	13,08	3,78

Moyennes et écarts-types aux épreuves orales (notes sur 20)

Statistiques établies sur les 554 admissibles du concours français, hors candidat admis à titre étranger.

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre » conséquent, donne beaucoup d'autonomie à la candidate ou au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidates et candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2026	232	8,1
2025	287	8,1
2024	315	8,1
2023	345	8,1
2022	338	8,1
2021	327	8,1
2020	325	–
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue depuis 2015.

Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 152 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20.

Rang	Moyenne
1	19,65
10	16,7
50	13,5
100	11,45
200	8,7

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une opportunité de promotion pour des professeures et professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment, avec les étudiants, la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent environ 20 % des admissibles, dont un grand nombre de lauréats de l'agrégation interne.

Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours rend le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de plus de 1000 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2027. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Le jury rappelle que tous les couplages sont *a priori* possibles et qu'il veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

1.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les seuls candidats à l'agrégation française : les candidats aux agrégations marocaine et tunisienne, qui composent sur les mêmes sujets d'écrit, en sont exclus.

Effectifs détaillés. Le jury rappelle son attachement à la participation des élèves normaliens, qui contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury espère que les responsables d'études des écoles normales supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

Ce tableau résume l'évolution des effectifs : sa première ligne porte sur l'agrégation française.

Année	Inscrits	Présents	Étudiants présents	ENS présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2026	2189	1093	429	60	300	3,6
2025	2245	1103	405	65	345	3,2
2024	2390	1202	462	56	365	3,3
2023	2499	1337	360	61	385	3,5
2022	2858	1411	379	82	364	3,9
2021	2823	1363	348	68	383	3,6
2020	2710	1409	344	93	387	3,6
2019	2787	1628	309	92	391	4,2
2018	3285	1545	352	89	381	4,1
2017	3582	1668	374	86	457	3,6
2016	3525	1841	364	78	467	3,9
2015	3252	1841	326	89	457	4,0
2014	3001	1546	371	72	395	3,9
2013	2673	1393	420	81	391	3,6
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2002	2343	1584	753	95	320	5,0
2001	2663	1828	857	105	310	5,9

Professions et diplômes.

Profession	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Élève d'une ENS	64	60	58	55	52
Étudiant en INSPÉ (1re année)	2	1	0	0	0
Étudiant en INSPÉ (2e année)	27	16	5	5	1
Étudiant hors INSPÉ (sans prépa.)	120	94	62	54	26
Étudiant hors INSPÉ (prépa. CNED)	12	9	3	3	1
Étudiant hors INSPÉ (prépa. privée)	7	6	3	2	1
Étudiant hors INSPÉ (prépa. universitaire)	326	303	224	213	124
Agriculteurs	2	0	0	0	0
Artisans / commerçants	2	0	0	0	0
Professions libérales	20	6	1	1	0
Cadres secteur privé convention collective	94	26	11	8	1
Salariés secteur tertiaire	35	13	7	5	1
Salariés secteur industriel	20	4	0	0	0
Sans emploi	266	89	45	33	7
Formateurs dans secteur privé	12	3	2	2	0
Emploi avenir prof. école publique	0	0	0	0	0
Emploi avenir prof. 2nd degré public	0	0	0	0	0
Emploi avenir prof. 2nd degré privé	2	0	0	0	0
AESH	4	0	0	0	0
Agent administratif d'un État de l'UE (hors France)	3	0	0	0	0
Personnel d'inspection	0	0	0	0	0
Personnel de direction	1	0	0	0	0
Personnel administratif et technique MEN	1	1	1	0	0
Enseignant du supérieur	8	2	0	0	0
Agent non titulaire fonction publique	12	4	1	1	1
Fonctionnaire stagiaire de la fonction publique	52	24	5	5	5
Militaire	2	2	2	1	1
Personnel enseignant titulaire fonction publique	236	93	27	17	3
Pers. enseignant non titulaire fonction publique	29	12	5	5	0
Enseignant non titulaire étab. scolaire étranger	14	2	1	0	0
Agent non titulaire de la fonction territoriale	1	0	0	0	0
Personnel de la fonction publique	23	7	5	2	1
Personnel de la fonction territoriale	2	0	0	0	0
Personnel de la fonction hospitalière	1	1	0	0	0
Maître contractuel ou agréé (rém. titulaire)	39	21	9	6	2
Maître contractuel ou agréé (rém. MA)	5	3	1	0	0
Maître délégué	10	5	1	1	0
PEPS	3	0	0	0	0
Agrégé	22	5	4	1	0
Certifié	516	226	56	25	2
Adjoint d'enseignement	0	0	0	0	0
Enseignant stagiaire 2nd degré	48	23	10	8	2
PLP	27	7	0	0	0
Instituteur	4	0	0	0	0
Instituteur suppléant	0	0	0	0	0
Professeur des écoles	17	4	0	0	0
Professeur des écoles stagiaire	0	0	0	0	0
Vacataire du 2nd degré	1	1	0	0	0
Vacataire enseignant du supérieur	5	0	0	0	0
Maître auxiliaire	5	0	0	0	0
Professeur associé 2nd degré	17	3	1	1	0
Contractuel 2nd degré	56	14	2	2	0

Profession	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Contractuel apprentissage (CFA)	1	0	0	0	0
Assistant d'éducation	3	0	0	0	0
Contractuel enseignant supérieur	10	3	2	1	1
Total	2189	1093	554	457	232

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

Profession	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Certifié	516	226	56	25	2
Étudiant hors INSPÉ (prépa. universitaire)	326	303	224	213	124
Sans emploi	266	89	45	33	7
Personnel enseignant titulaire fonction publique	236	93	27	17	3
Étudiant hors INSPÉ (sans prépa.)	120	94	62	54	26
Cadres secteur privé convention collective	94	26	11	8	1
Élève d'une ENS	64	60	58	55	52
Contractuel 2nd degré	56	14	2	2	0
Fonctionnaire stagiaire de la fonction publique	52	24	5	5	5
Enseignant stagiaire 2nd degré	48	23	10	8	2
Maître contractuel ou agréé (rém. titulaire)	39	21	9	6	2
Salariés secteur tertiaire	35	13	7	5	1
Pers. enseignant non titulaire fonction publique	29	12	5	5	0
Étudiant en INSPÉ (2e année)	27	16	5	5	1
PLP	27	7	0	0	0
Personnel de la fonction publique	23	7	5	2	1
Agrégé	22	5	4	1	0
Professions libérales	20	6	1	1	0
Salariés secteur industriel	20	4	0	0	0
Professeur des écoles	17	4	0	0	0
Professeur associé 2nd degré	17	3	1	1	0
Enseignant non titulaire étab. scolaire étranger	14	2	1	0	0
Étudiant hors INSPÉ (prépa. CNED)	12	9	3	3	1
Agent non titulaire fonction publique	12	4	1	1	1
Formateurs dans secteur privé	12	3	2	2	0
Maître délégué	10	5	1	1	0
Contractuel enseignant supérieur	10	3	2	1	1
Enseignant du supérieur	8	2	0	0	0
Étudiant hors INSPÉ (prépa. privée)	7	6	3	2	1
Maître contractuel ou agréé (rém. MA)	5	3	1	0	0
Maître auxiliaire	5	0	0	0	0
Vacataire enseignant du supérieur	5	0	0	0	0
AESH	4	0	0	0	0
Instituteur	4	0	0	0	0
Agent administratif d'un État de l'UE (hors France)	3	0	0	0	0
Assistant d'éducation	3	0	0	0	0
PEPS	3	0	0	0	0
Militaire	2	2	2	1	1
Étudiant en INSPÉ (1re année)	2	1	0	0	0
Agriculteurs	2	0	0	0	0

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Profession	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Artisans / commerçants	2	0	0	0	0
Emploi avenir prof. 2nd degré privé	2	0	0	0	0
Personnel de la fonction territoriale	2	0	0	0	0
Personnel administratif et technique MEN	1	1	1	0	0
Personnel de la fonction hospitalière	1	1	0	0	0
Vacataire du 2nd degré	1	1	0	0	0
Agent non titulaire de la fonction territoriale	1	0	0	0	0
Contractuel apprentissage (CFA)	1	0	0	0	0
Personnel de direction	1	0	0	0	0
Adjoint d'enseignement	0	0	0	0	0
Emploi avenir prof. 2nd degré public	0	0	0	0	0
Emploi avenir prof. école publique	0	0	0	0	0
Instituteur suppléant	0	0	0	0	0
Personnel d'inspection	0	0	0	0	0
Professeur des écoles stagiaire	0	0	0	0	0
Total	2189	1093	554	457	232

Résultat du concours par catégories professionnelles (par nombre d'inscrits)

Catégorie	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Élèves des ENS	64	60	58	55	52
Étudiants (hors ENS)	494	429	297	277	153
Professeurs certifiés	516	226	56	25	2
Autres enseignants titulaires	356	132	40	24	5
Enseignants stagiaires, contractuels et vacataires	255	90	28	23	8
Autres personnels de la fonction publique	53	15	9	4	3
Secteur privé et professions libérales	185	52	21	16	2
Sans emploi	266	89	45	33	7
Total	2189	1093	554	457	232

Résultat du concours par grandes catégories professionnelles[3]

3. Regroupement des catégories déclarées à l'inscription. *Autres enseignants titulaires* : agrégés, PLP, PEPS, professeurs des écoles et instituteurs, maîtres contractuels titulaires, enseignants du supérieur, autres enseignants titulaires de la fonction publique. *Enseignants stagiaires, contractuels et vacataires* : y compris les fonctionnaires stagiaires, les maîtres auxiliaires et délégués, les professeurs associés et les emplois d'avenir professeur. *Autres personnels de la fonction publique* : personnels d'inspection, de direction, administratifs, territoriaux, hospitaliers, militaires, AESH et assistants d'éducation.

Diplôme	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Dispense (parent de trois enfants)	31	11	3	0	0
Doctorat	105	33	17	12	3
Diplôme post-secondaire (5 ans ou plus)	41	14	2	1	0
Grade de master	88	27	16	11	7
Enseignant titulaire ou ancien titulaire cat. A	187	71	20	6	0
CPE titulaire ou ancien titulaire	1	0	0	0	0
Master MEEF	379	164	34	26	7
Autre Master	900	568	369	332	192
Échelle de rém. certifié, PLP, PEPS	10	3	0	0	0
Diplôme de grande école (bac+5)	101	45	27	18	3
Échelle de rém. professeur des écoles	1	1	0	0	0
Diplôme d'ingénieur (bac+5)	322	149	64	49	19
Diplôme classe niveau 7	21	7	2	2	1
Diplôme classe niveau 8	2	0	0	0	0
Total	2189	1093	554	457	232

Résultat du concours par diplômes

Diplôme	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Autre Master	900	568	369	332	192
Master MEEF	379	164	34	26	7
Diplôme d'ingénieur (bac+5)	322	149	64	49	19
Enseignant titulaire ou ancien titulaire cat. A	187	71	20	6	0
Doctorat	105	33	17	12	3
Diplôme de grande école (bac+5)	101	45	27	18	3
Grade de master	88	27	16	11	7
Diplôme post-secondaire (5 ans ou plus)	41	14	2	1	0
Dispense (parent de trois enfants)	31	11	3	0	0
Diplôme classe niveau 7	21	7	2	2	1
Échelle de rém. certifié, PLP, PEPS	10	3	0	0	0
Diplôme classe niveau 8	2	0	0	0	0
Échelle de rém. professeur des écoles	1	1	0	0	0
CPE titulaire ou ancien titulaire	1	0	0	0	0
Total	2189	1093	554	457	232

Résultat du concours par diplômes (par nombre d'inscrits)

Outre la présence notable d'enseignants certifiés, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur ou issus d'une grande école. Cette donnée confirme l'observation d'un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionnelle, que d'une orientation en fin de formation.

Malgré l'opportunité de se présenter au concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat, 33 docteurs se sont présentés au concours externe. Parmi eux, 17 ont été admissibles et seulement 3 ont franchi la barre d'admission. Le taux de réussite assez faible de ces candidats, alors que certains d'entre eux ont une expérience d'enseignement dans le supérieur, interroge. Il démontre que le concours est exigeant et nécessite une préparation spécifique.

Répartition selon le genre. Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 41 % de femmes. La correction des épreuves écrites est dématérialisée et anonyme. Le jury ne dispose d'aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation. Néanmoins, comme le tableau suivant l'indique, la répartition hommes/femmes reste très déséquilibrée. Par rapport à 2025, la part des femmes recule à toutes les étapes du concours, sauf à l'admission (19,0 % contre 18,1 %). Comme l'an dernier, c'est entre l'écrit et l'admissibilité qu'elle baisse le plus nettement (de 23,2 % à 17,1 %) ; elle se maintient ensuite à l'oral et progresse légèrement à l'admission.

Cette année, la première femme est classée 20e ; on compte quatre femmes parmi les 50 premiers.

	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Femmes	526	254	95	79	44
Hommes	1663	839	459	378	188
Total	2189	1093	554	457	232
Part des femmes	24,0 %	23,2 %	17,1 %	17,3 %	19,0 %
Rappel 2025	*27,0 %*	*25,6 %*	*18,8 %*	*17,5 %*	*18,1 %*

Répartition des candidates et candidats selon le genre aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidates et candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admises et admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-28 ans.

Âge	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Moins de 25 ans	407	358	279	268	175
De 25 à 29 ans	550	278	128	102	43
De 30 à 39 ans	504	173	62	43	8
De 40 à 49 ans	363	148	49	25	5
Au moins 50 ans	365	136	36	19	1
Total	2189	1093	554	457	232

Répartition des candidates et candidats par tranche d'âge aux différentes étapes du concours

Âge	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
20 ans	2	1	0	0	0
21 ans	2	2	2	2	2
22 ans	40	38	33	32	20
23 ans	195	185	156	147	101
24 ans	168	132	88	87	52
25 ans	137	99	49	43	16
26 ans	127	63	27	20	9
27 ans	110	50	23	17	6
28 ans	98	43	20	16	10
29 ans	78	23	9	6	2
30 ans	68	29	10	6	1
31 ans	65	23	10	7	1
32 ans	53	17	7	5	1
33 ans	49	17	6	5	1
34 ans	51	17	3	1	0
35 ans	52	18	12	9	0
36 ans	47	16	6	5	3
37 ans	48	13	2	0	0
38 ans	35	10	3	3	1
39 ans	36	13	3	2	0
40 ans	44	16	6	4	0
41 ans	41	14	3	0	0
42 ans	29	15	3	1	0
43 ans	29	13	5	4	1
44 ans	29	13	7	2	1
45 ans	39	18	5	4	2
46 ans	35	12	5	4	0
47 ans	37	14	5	2	0
48 ans	41	16	4	2	0
49 ans	39	17	6	2	1
50 ans	36	15	3	3	0
51 ans	38	16	7	3	0
52 ans	36	13	4	2	0
53 ans	56	17	8	4	0
54 ans	27	12	1	1	0
55 ans	29	12	2	1	1
56 ans	25	13	1	0	0
57 ans	22	6	1	0	0

Âge	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
58 ans	21	11	1	0	0
59 ans	19	5	1	1	0
60 ans	13	4	3	2	0
61 ans	7	2	1	0	0
62 ans	11	2	0	0	0
63 ans	8	3	0	0	0
64 ans	5	2	1	0	0
65 ans	3	1	1	1	0
66 ans	3	1	1	1	0
67 ans	1	0	0	0	0
68 ans	2	1	0	0	0
69 ans	1	0	0	0	0
70 ans	1	0	0	0	0
71 ans	1	0	0	0	0
Total	2189	1093	554	457	232

Répartition des candidates et candidats par âge aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'académie. Le tableau de répartition des candidates et candidats par académie montre une forte concentration des présents et des admis dans les académies de Créteil-Paris-Versailles, Lyon et Rennes, sièges des écoles normales supérieures. Hormis ces académies, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/présents) des académies de Besançon (43 %) et de Grenoble (33 %), suivies de celles de Dijon et de Strasbourg (environ 30 %), pour une moyenne nationale de 21 %.

Académie	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis	Réussite (%)
Aix-Marseille	97	45	20	15	7	16
Amiens	54	32	8	7	2	6
Besançon	35	30	24	22	13	43
Bordeaux	71	44	13	11	5	11
Clermont-Ferrand	32	18	10	9	5	28
Corse	3	1	1	1	0	0
Créteil-Paris-Versailles (SIEC)	675	319	176	142	72	23
Dijon	27	19	11	9	6	32
Grenoble	73	46	33	29	15	33
Guadeloupe	17	5	0	0	0	0
Guyane	13	4	1	1	1	25
La Réunion	44	14	2	1	1	7
Lille	89	47	26	22	8	17
Limoges	13	4	1	1	0	0
Lyon	121	71	45	39	24	34
Martinique	9	4	1	0	0	0
Mayotte	16	4	0	0	0	0
Montpellier	52	25	8	7	2	8
Nancy-Metz	60	37	21	20	7	19
Nantes	59	38	15	11	5	13
Nice	63	25	7	6	3	12
Normandie	74	38	21	18	3	8
Nouvelle-Calédonie	7	4	1	0	0	0
Orléans-Tours	56	32	13	10	6	19
Poitiers	160	21	5	2	0	0
Polynésie Française	10	3	1	1	0	0
Reims	18	11	7	6	3	27
Rennes	90	63	36	32	26	41
Strasbourg	67	44	21	18	13	30
Toulouse	84	45	26	17	5	11
Total	2189	1093	554	457	232	21

Répartition des candidates et candidats par académie aux différentes étapes du concours

Réussite : rapport du nombre d'admis au nombre de présents à l'écrit.

Chapitre 2

Épreuves d'admissibilité

Énoncés

Les sujets des deux épreuves écrites sont disponibles sur le site du jury https://agreg.org ou sur le site ministériel https://www.devenirenseignant.gouv.fr.

2.1 Épreuve de mathématiques générales

2.1.1 Présentation du sujet

Le thème général du sujet est l'étude de quelques propriétés algébriques (spectre du laplacien), géométriques (chemins, distance), topologiques (lacets), analytiques (fonctions harmoniques) et probabilistes (marche au hasard) des graphes et plus particulièrement des graphes de Cayley, pour lesquels ces propriétés ont des liens avec les propriétés algébriques du groupe considéré.

Aucune exhaustivité n'est recherchée, dans aucun des domaines. On s'attache plutôt à l'étude de quelques exemples archétypiques, à l'aide d'outils au programme des épreuves écrites du concours.

Après un préliminaire destiné à préparer une question ultérieure et deux exemples de spectres de matrices laplaciennes (correspondant au graphe « complet » et au graphe « étoile »), on définit les graphes non orientés et leur distance combinatoire en en démontrant quelques propriétés.

On définit ensuite le laplacien d'un graphe et ses fonctions harmoniques, ce qui permet d'aborder les premiers exemples infinis, puis de voir le lien entre le laplacien et la structure hilbertienne de l'espace des fonctions de carré sommable.

On se restreint ensuite provisoirement aux graphes finis pour démontrer quelques propriétés générales et étudier ensuite les spectres de deux nouveaux exemples (graphe « cyclique » et graphe « chemin »).

On introduit ensuite la notion de graphe de Cayley et les différents types de croissance, en démontrant quelques propriétés générales, puis on détermine la croissance de $\mathbb{Z}^2$ et celle du groupe de Heisenberg discret.

La fin du sujet est consacrée au groupe libre à deux générateurs, qu'on introduit par le biais des arbres. Après avoir étudié la surjectivité du laplacien, on définit le noyau de Poisson à l'aide des fonctions de Busemann, pour préparer le résultat final. On étudie ensuite la vitesse de fuite de la marche au hasard. On introduit alors le bord à l'infini et on prouve qu'il fournit une compactification du groupe libre. On montre aussi que c'est un espace de Cantor. On prouve ensuite la convergence de la marche au hasard vers un point à l'infini ce qui permet de définir les mesures harmoniques. On termine le sujet par la résolution du problème de Dirichlet sur le compactifié géométrique du groupe libre.

2.1.2 Rédaction des copies

Nécessité d'une rédaction claire

Pour sélectionner de futurs enseignants, il est naturel de prendre en compte de manière significative, outre leurs compétences purement mathématiques, leur capacité à se faire comprendre aisément et à transmettre de « bons usages » en la matière. Cela est pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Rappelons à cet effet quelques règles assez consensuelles.

Langage français et langage formel

Les phrases sont écrites soit en français, soit en langage formel. On admet qu'une sous-phrase d'une phrase en français soit écrite en langage formel à condition qu'elle soit bien détachée du reste du texte, par exemple par un retour à la ligne.

En aucun cas des symboles comme $\forall, \exists, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ ne devraient servir d'abréviations dans un texte en français.

Il y a une exception notable couramment acceptée dans l'introduction des variables pour alléger le texte : on tolère les écritures de la forme

« Soit $x \in X$. » ou « Soit $A \subset E$. »

à la place de

« Soit x un élément de X. » ou « Soit A une partie de E. »

Quantificateurs

Dans une phrase mathématique écrite en langage formel, les quantifications doivent obligatoirement précéder l'utilisation des variables qu'elles introduisent. Il est préférable qu'il en soit de même en français pour éviter les ambiguïtés, notamment dans le cas de quantifications multiples.

Abréviations

Les abréviations ou acronymes doivent être employés avec parcimonie et préalablement définis.

Il est par exemple déraisonnable que le quatrième mot d'une copie soit « dzble ».

Mise en valeur de certains points

Par ailleurs, il est fortement recommandé de mettre en valeur certains points clés du raisonnement, comme certaines hypothèses utilisées, en particulier lors de l'application de théorèmes, (par exemple en les soulignant) et les résultats obtenus, qui étaient requis par l'énoncé (par exemple en les encadrant).

Il est aussi préférable que la structure logique du raisonnement soit mise en valeur par des retours à la ligne judicieux, voire des indentations le cas échéant.

Expression française

Une phrase commence par une majuscule, comporte au moins un sujet et un verbe avec, la plupart du temps, un complément et finit par un point. Il est mal avisé de faire des erreurs de français à chaque ligne (voire à chaque mot) et, par conséquent, préférable de relire au moins une fois chaque phrase qu'on écrit.

Présentation

L'écriture doit être lisible. Bien noter que les encres trop claires peuvent donner des images numériques en partie indéchiffrables. Les ratures sont à proscrire ainsi que l'utilisation de correcteur. Il est fortement conseillé de faire un brouillon et, en cas de changement d'avis, de barrer proprement et sobrement la partie à ne pas corriger. Ne pas barrer une piste finalement abandonnée au profit d'une autre est un manque de respect pour la personne qui corrige. Dans le même ordre d'idée, recopier tout ou partie de l'énoncé est à éviter car c'est une perte de temps et une gêne pour la correction.

Niveau de détail

Le fait que toute affirmation doive être justifiée n'empêche pas la concision. Il est déraisonnable de prendre presque quatre pages pour obtenir (seulement) les valeurs propres de la matrice de la question 1.

Consignes

Les consignes et notations de l'énoncé sont impératives. Il convient de les respecter pour obtenir tous les points afférents à la question traitée.

Numérotation

La numérotation claire des questions est obligatoire et il est fortement conseillé que l'ordre des questions soit respecté, au moins dans chaque partie du problème. Si, par exception, ce n'est pas le cas, le signaler par un renvoi.

2.1.3 Raisonnement

Importance de la logique

Il ne s'agit plus ici de la mise en forme évoquée ci-dessus, mais bien du fondement des mathématiques. Il est primordial que de futurs enseignants soient exemplaires à ce sujet.

Nécessité n'est pas suffisance

Il est fréquent de voir des confusions entre l'implication $A \Longrightarrow B$ et l'équivalence $A \iff B$, mises en évidence par le manque de réciproque dans la preuve, notamment dans les questions 1, 4, 12 et 13. Illustrons-le par un exemple.

On voit plusieurs fois dans la première question une rédaction du type :

« Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } (J_3 - \text{I}_3)$.

Alors, [...] donc $V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\text{Ker } (J_3 - \text{I}_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. »

Cela est fautif, car seule la nécessité a été prouvée (c'est-à-dire l'inclusion du premier ensemble dans le second). Il faut une **réciproque** pour prouver la suffisance (c'est-à-dire l'inclusion du second ensemble dans le premier), **aussi simple ou évidente soit elle** (par exemple, ici, on peut dire que l'espace propre est non trivial, donc est au moins une droite vectorielle, puisqu'on a démontré précédemment que 1 est valeur propre de J_3).

Il est bien sûr possible de raisonner directement par équivalences.

Dans le même ordre d'idées, pour montrer qu'une application linéaire Δ n'est pas injective, *i.e.* que $\operatorname{Ker}\Delta \neq \{0\}$, la preuve ne devrait pas commencer par « Soit $f \in \operatorname{Ker}\Delta$. Alors... ». Il suffit ici d'exhiber un vecteur non nul du noyau.

Introduction des objets

Pour montrer une proposition mathématique de la forme « $\forall x \in E, P(x)$ », la démonstration devrait commencer par introduire l'objet x sous la forme « Soit $x \in E$. » et terminer par « Donc $P(x)$. »

De manière générale, tout objet qui n'a pas été introduit par l'énoncé doit être introduit dans la copie.

Preuve

Une démonstration est une suite d'énoncés mathématiques vrais (éventuellement après avoir émis des hypothèses), dont chacun se déduit des précédents ou d'hypothèses ou de résultats de l'énoncé. Ces déductions sont justifiées par des mots ou expressions comme « donc », « or », « car », « comme..., on a ... », « ... par ... », « D'après la question numéro... », « En appliquant le théorème... », « D'une part... d'autre part... », « Par ailleurs... »,... qui sont préférentiellement situés au début de chaque phrase. On ne devrait donc jamais écrire une nouvelle phrase (écrite en français ou en langage formel) sans l'inscrire dans le schéma logique global à l'aide d'une telle expression.

Les hypothèses, toutes les hypothèses, rien que les hypothèses

Lorsqu'on applique un théorème, on doit en rappeler les hypothèses et, lorsque cela n'est pas trivial, les vérifier. Par exemple, dans la question 2, pour utiliser le théorème spectral, on doit stipuler, **au moment de son application**, que la matrice est symétrique et à coefficients réels. L'oubli d'une de ces deux hypothèses est une erreur et l'ajout d'une hypothèse inutile (comme par exemple le fait que la matrice est positive) en est une autre.

Type de raisonnement

Il est fortement conseillé d'annoncer au départ le type de raisonnement utilisé dans le cas d'une disjonction de cas, d'une contraposition, d'un raisonnement par l'absurde, d'un raisonnement par analyse-synthèse ou d'un raisonnement par récurrence.

Confusions de types d'objets

Il est dommageable, pour quelqu'un qui se destine à l'enseignement des mathématiques, de confondre à maintes reprises l'appartenance et l'inclusion ou de confondre l'application f avec l'image $f(x)$ d'un objet x par f. Par exemple, dans la question 12, écrire $\Delta\big(f(x)\big)$ n'a aucun sens.

« Le » ou « un »

On emploie un article défini seulement lorsque l'objet en question est déterminé de manière unique. Dire « calculons **le** vecteur propre associé à la valeur propre 1 » n'a pas de sens.

Ordre des égalités

Pour montrer que $a = b$ en passant par une étape intermédiaire, on écrit $a = c = b$, ce qui est une abréviation pour dire « On a $a = c$ et $c = b$, donc (par transitivité de l'égalité) $a = b$. »

Il serait fautif d'écrire $a = b = c$.

Par exemple, dans la question 7, si l'on raisonne par récurrence, on vérifie l'initialisation par le calcul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X - 2 = (X-2)(X-1)^{2-2}$$

et non pas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)^{2-2} = X - 2.$$

Honnêteté intellectuelle

Elle devrait être la qualité première d'un scientifique, encore plus d'un enseignant. Changer subrepticement un signe d'une page à l'autre pour arriver au résultat donné dans l'énoncé est indigne de la carrière envisagée.

Bien au contraire, il est apprécié que le candidat ou la candidate remarque explicitement qu'il y a une erreur, lorsque cette erreur n'a pas été débusquée.

2.1.4 Notions mathématiques

On attend en premier lieu que les candidat.e.s maîtrisent bien les notions mathématiques qu'ils/elles pourraient être amené.e.s à enseigner, c'est-à-dire jusqu'à deux années après le baccalauréat.

On voit assez souvent dans les copies des lacunes concernant les inégalités relevant pourtant du programme du lycée. Cela a été le cas dans la question 15, où l'on conserve parfois une inégalité lorsqu'on la multiplie par un nombre de signe inconnu, faute d'avoir pris des valeurs absolues pour majorer.

2.1.5 Remarques particulières

Question 1 Ne pas savoir diagonaliser une matrice 3×3 (erreurs de calcul mises à part), voire ne pas savoir ce qu'est la diagonalisabilité, n'est vraiment pas raisonnable pour un concours de ce niveau. Par exemple, montrer que la matrice est inversible dans cette question n'est pas de nature à impressionner favorablement le jury.

Calculer le polynôme caractéristique en huit étapes ne montre pas non plus une grande maîtrise, alors que la règle de Sarrus (*i.e.* la formule du déterminant dans le cas $n = 3$) le donne immédiatement et qu'un développement par rapport à une ligne ou une colonne ou l'algorithme du pivot le donnent rapidement.

Question 2 Le fait que la matrice symétrique soit à coefficients réels est primordial.

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Question 3 Mathématiquement parlant, le polynôme caractéristique n'est qu'un outil de réduction et n'a plus de réelle utilité une fois cette réduction effectuée. En conséquence, réduire la matrice par d'autres moyens pour calculer le polynôme caractéristique n'est pas une démarche mathématiquement

intéressante, même si elle est correcte. Il semble étrange que certains candidats se lancent systématiquement dans cette voie avant même d'essayer un calcul direct (pourtant assez élémentaire), souvent d'ailleurs en échouant à justifier correctement leur démarche.

Il y avait de nombreuses méthodes pour le calcul de ce polynôme caractéristique. Il est indispensable d'expliciter chaque opération effectuée.

Question 4 Il y avait beaucoup de manières différentes de résoudre cette question. Certain.e.s se perdent un peu sur le chemin de leur raisonnement.

Ne pas confondre un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel avec son complémentaire.

Question 5 Lorsqu'on demande d'énoncer un théorème, on veut des hypothèses précises et une conclusion claire.

Question 6 Quand l'énoncé stipule de chercher au brouillon, cela ne doit pas figurer sur la copie, où seul le résultat est attendu.

Question 7 Il y avait ici une coquille : dans la description par blocs, l'indice de la matrice identité doit être $n-1$ (comme pour la matrice S_n introduite plus haut) au lieu de n.

Bien que les concepteurs du sujet déplorent sincèrement cette coquille, il aurait été souhaitable qu'elle ne déstabilise pas outre mesure un.e candidat.e à l'agrégation. Rappelons que, si elle ou il repère ce qui lui semble une coquille ou une erreur dans un sujet, la marche à suivre est de le signaler sur la copie, de faire la correction appropriée et de poursuivre la composition avec ce nouvel énoncé.

En ce qui concerne le contenu mathématique, la récurrence est naturelle ici, puisque le résultat est donné. Il y a cependant plusieurs méthodes directes. On en donne deux dans le corrigé.

Question 8 Le polynôme caractéristique se déduit rapidement de la question précédente et les dimensions des sous-espaces propres découlent de la diagonalisabilité de la matrice. Le fait que 1 ne soit pas valeur propre lorsque $n = 2$ n'a quasiment jamais été remarqué.

Question 9 Le chemin à zéro arêtes existe bien et il est nécessaire de l'utiliser pour prouver la réflexivité. On attendait dans cette question des rédactions précises notamment pour la description des chemins.

Question 10 Attention, l'axiome de séparation est une équivalence, dont il faut prouver les deux implications. La symétrie nécessitait une preuve précise.

Question 11 Elle a été globalement mal traitée. Il y a eu notamment des confusions entre la connexité du graphe et celle de l'espace topologique (métrique) des sommets. Dans certaines copies, seulement les réunions dénombrables d'ouverts sont des ouverts.

Question 12 Attention, montrer que l'application Δ est « bien définie » n'est pas (du tout) prouver que si $f = g$ alors $\Delta f = \Delta g$!

Pour prouver la non injectivité, prendre un graphe particulier est une erreur de logique.

Question 13 Le raisonnement par analyse-synthèse semble le plus approprié ici.

Pour le cas de $\mathbb{Z}$, ne détailler que ce qui change par rapport au cas de $\mathbb{N}$, ne pas tout refaire en détail.

Question 14 Immédiate et juste destinée à faire remarquer que, lorsque le graphe est fini, $\Delta = \Delta_H$ est un endomorphisme autoadjoint, ce qui sert dans la partie suivante.

Question 15 Plus difficile que les précédentes, elle a été peu traitée et rarement avec succès.

Question 16 La résolution est immédiate si l'on a fait la question précédente et si l'on sait caractériser la continuité des applications linéaires.

Question 17 Il y avait beaucoup de choses à prouver dans cette question délicate. Dans de nombreuses copies, on se contente de prouver le caractère autoadjoint de l'opérateur.

Question 18 La résolution est rapide en utilisant les résultats de la partie précédente.

Pour l'équivalence entre la surjectivité et l'injectivité, il faut bien préciser qu'on a un **endomorphisme** d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Si l'on parle d'application linéaire, il faut de plus préciser que les ensembles de départ et d'arrivée ont même dimension.

Il n'est pas du tout nécessaire de revenir aux matrices pour prouver la diagonalisabilité de Δ, mais si on le fait, il faut prendre une base orthonormée.

Question 19 Il est rare de voir utiliser ici la question 17, qui donne rapidement la solution.

Question 20 La structure euclidienne donne immédiatement le résultat.

Question 21 Les graphes sont corrects dans la plupart des copies.

Questions 22 et 23 Ces questions classiques sont bien traitées dans de nombreuses copies.

Question 24 Attention, il est demandé ici le spectre de C_n et non celui de J_n.

Le détail des multiplicités est rare.

Question 25 Le premier point est rarement traité, mais correctement lorsque c'est le cas.

Le second point, bien plus difficile, n'est quasiment jamais abordé.

Question 26 Assez souvent traitée, mais rarement entièrement.

Attention, il ne suffit pas de savoir mettre une structure de groupe sur l'ensemble des sommets d'un graphe pour que ce soit un graphe de Cayley.

Par ailleurs, il est tout à fait possible de mettre une structure de groupe sur $\mathbb{N}$, même si cela ne sert pas ici.

Question 27 Lorsqu'elle est traitée, l'idée est souvent correcte, mais la preuve rarement rigoureuse.

Question 28 Les copies arrivant à ce stade la traitent en général correctement.

Question 29 On trouve en général, parmi les copies traitant cette question, des pistes correctes pour le point a, mais non complètement rédigées.

Curieusement, le point b, moins délicat, n'est quasiment jamais traité.

Question 30 Elle est plus élémentaire que la partie précédente et de nombreux candidat.e.s ont réussi à obtenir ici des points.

Question 31 Celle-ci est un peu plus difficile que la précédente, avec beaucoup moins de réussite.

Question 32 À part la déduction finale, elle était difficile et a été très rarement réussie.

Question 33 Elle ne nécessite pas vraiment d'idée supplémentaire, mais une certaine aisance technique.

Question 34 Dans les copies l'abordant, on voit en général des pistes intéressantes (qui sont valorisées), mais assez peu de rédactions complètes.

Question 35 Le dessin correct montrait ici une bonne compréhension du groupe libre. Nul besoin d'un graphisme impeccable pour prendre tous les points.

Question 36 C'était une conséquence rapide des résultats précédents sur les arbres.

Question 37 Le résultat est naturel et la plupart des copies abordant cette question en font un traitement correct.

Questions 38 à 41 Plus délicates et éloignées dans le sujet, elles n'ont quasiment jamais été abordées.

Questions 42 et 43 Plusieurs copies traitent ces questions sans avoir fait ce qui précède, ce qui est sans aucun doute dû au rappel de l'inégalité de Hoeffding en début d'énoncé.

Dans la question 42, l'indépendance est subtile et, si l'on s'en sert, il faut la prouver.

Dans la question 43, même si l'argument utilisant le lemme de Borel-Cantelli est très classique, on doit le détailler.

Question 44 Cette *transience* de la marche au hasard est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Question 45 L'énoncé oublie d'écarter le cas $x = y$ dans la définition de d', ce qui n'a pas eu l'air de gêner les candidats qui ont traité cette question, qui ont naturellement « prolongé » la définition.

Question 46 Elle est délicate, elle n'a quasiment pas été abordée.

Question 47 Les résultats demandés sont des conséquences rapides des deux questions précédentes.

Question 48 Elle n'a pas été abordée, probablement à cause de la longueur de l'énoncé.

Questions 49 et 50 Ces questions, plus difficiles, n'ont pas été abordées.

2.1.6 Corrigé

Notations et rappels

On note :

- $\delta_{x,y}$ le *symbole de Kronecker* valant 1 si $x = y$ et 0 sinon, pour deux objets x et y ;
- $\mathcal{P}_k(Y)$ l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble Y ;
- $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{N}' = \mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$;
- $[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant n \leqslant q\}$, pour p et q deux entiers relatifs ;
- X l'indéterminée des polynômes ;
- χ_M le polynôme caractéristique (unitaire) d'une matrice M.

Pour $\mathbb{K}$ désignant le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et n et p des éléments de $\mathbb{N}^\star$:

- $\mathrm{U}_{n,p}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1 ;
- I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $e = (e_i)_{i=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$;
- on identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en associant le vecteur $x = (x_i)_{i=1}^n$ à la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité de Hoeffding pour une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(\left| \frac{Y}{n} - p \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2}.$$

I. Préliminaire

1. Montrer que la matrice

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
En donner une base explicite de vecteurs propres dans $\mathbb{C}^3$, exprimée en fonction de $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

On sait, on remarque ou on calcule que les trois vecteurs

$$\boxed{(1,1,1), \quad (1,\mathrm{j},\mathrm{j}^2) \quad \text{et} \quad (1,\mathrm{j}^2,\mathrm{j})}$$

sont des vecteurs propres de J_3 de valeurs propres respectives

$$\boxed{1, \quad \mathrm{j} \quad \text{et} \quad \mathrm{j}^2.}$$

Comme ces trois valeurs propres sont distinctes, les 3 vecteurs forment une famille libre en dimension 3 finie, donc une base de $\mathbb{C}^3$, donc

la matrice J_3 est diagonalisable.

II. Premiers exemples

Soit n un élément de $\mathbb{N}'$.

Dans cette partie, on travaille sur le corps de base $\mathbb{R}$ et on s'intéresse aux éléments propres des matrices suivantes :

$$K_n = n\,\mathrm{I}_n - \mathrm{U}_{n,n} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

et

$$S_n = \left(\begin{array}{c|c} (n-1) & -\mathrm{U}_{1,n-1} \\ \hline -\mathrm{U}_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier l'existence d'une matrice D diagonale à coefficients réels et d'une matrice P orthogonale telles que $K_n = PDP^{\mathrm{T}}$.

D'après le théorème spectral, la matrice K_n étant symétrique à coefficients réels, elle est orthodiagonalisable.

---

3. Montrer que $\chi_{K_n} = X(X-n)^{n-1}$.

Par définition,

$$\chi_{K_n} = \begin{vmatrix} X-n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & X-n+1 \end{vmatrix}.$$

Comme le déterminant matriciel est une forme n-linéaire alternée en fonction des colonnes de sa variable, il est inchangé par l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=1}^{n-1} C_j$, puis par mise en facteur de X dans C_n, ce qui donne

$$\chi_{K_n} = X \begin{vmatrix} X-n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & X-n+1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il est inchangé par soustraction de la dernière colonne à toutes les autres, donc

$$\chi_{K_n} = X \begin{vmatrix} X-n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X-n & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit de ses coefficients diagonaux,

$$\boxed{\chi_{K_n} = X(X-n)^{n-1}.}$$

---

4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} K_n$.
En déduire une équation de l'espace propre de K_n associé à la valeur propre n.
Montrer que $b = (b_i)_{i=2}^n = (e_i - e_1)_{i=2}^n$ est une base de cet espace propre.

Comme 0 est racine simple de χ_{K_n}, $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} K_n \leqslant 1$, donc $\operatorname{Ker} K_n$ est une droite.
Puisque la somme de chaque ligne de K_n est nulle,

$$\boxed{(u) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} K_n, \text{ en posant } u = (1, \dots, 1).}$$

Comme les sous-espaces propres de K_n sont orthogonaux par la question **2**, u est un vecteur non nul orthogonal à l'espace propre E_n de K_n associé à la valeur propre n.
Comme cet espace propre est un hyperplan puisque K_n est diagonalisable, il admet pour équation dans la base canonique

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.}$$

Il est alors immédiat que $b = (b_i)_{i=2}^n = (e_i - e_1)_{i=2}^n$ est une famille de vecteurs de E_n.
Comme I_{n-1} est une matrice inversible d'ordre $n-1$ extraite de $\operatorname{Mat}_e(b)$ ayant elle-même $n-1$ colonnes, $\operatorname{Mat}_e(b)$ est de rang $n-1$, donc la famille b est libre.
Comme, de plus, $\dim E_n = n-1$,

$$\boxed{b \text{ est une base de } E_n.}$$

---

5. Énoncer le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille finie.
On donnera les formules explicites utilisées pour construire la famille orthonormée.

Soit $m \in \mathbb{N}^\star$.
Pour toute famille libre $(f_i)_{i=1}^m$ d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i=1}^m$ telle que

$$\boxed{\forall p \in [\![1, m]\!], \quad \big(\operatorname{Vect}(e_i)_{i=1}^p = \operatorname{Vect}(f_i)_{i=1}^p \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p \rangle > 0\big).}$$

De plus, cette famille est obtenue par l'algorithme suivant : pour p variant de 0 à $m-1$,

$$\boxed{e_{p+1} = \|u_{p+1}\|^{-1} u_{p+1}, \quad \text{o} \quad u_{p+1} = f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i.}$$

---

6. Donner **sans justification** la forme générale des vecteurs e'_i de la famille $e' = (e'_i)_{i=2}^n$ obtenue par orthonormalisation de b.
(On pourra, au brouillon, calculer quelques vecteurs, conjecturer la formule et la vérifier.)
En déduire des matrices P et D qui vérifient le résultat du point **2**.

On a, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$,

$$\boxed{e'_i = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \left((i-1)e_i - \sum_{j=1}^{i-1} e_j \right) = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} (-1, \ldots, -1, \underbrace{i-1}_{i\text{-ème position}}, 0, \ldots, 0).}$$

Pour obtenir une base orthonormée e' de vecteurs propres, il suffit de poser

$$\boxed{e'_1 = \|u\|^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \ldots, 1).}$$

Les matrices suivantes vérifient donc l'égalité du point **2** :

$$\boxed{D = \operatorname{diag}(0, n, \ldots, n)}$$

et

$$\boxed{P = \operatorname{Mat}_e(e') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \vdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}}$$

---

7. On définit le déterminant suivant

$$\delta_n = \left| \begin{array}{c|c} (1) & \mathrm{U}_{1,n-1} \\ \hline \mathrm{U}_{n-1,1} & (X-1)\mathrm{I}_{\boxed{\text{n-1}}} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix}.$$

Prouver soigneusement que $\delta_n = (X-n)(X-1)^{n-2}$.

Il y avait beaucoup de méthodes possibles ici. On en donne trois.

Méthode 1 (la plus courante)

On raisonne par récurrence en posant, pour $n \in \mathbb{N}'$,

$$\mathcal{A}_n : \delta_n = (X-n)(X-1)^{n-2}.$$

Initialisation. On a $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X-2 = (X-2)(X-1)^{2-2}$, donc $\boxed{\mathcal{A}_2 \text{ est vérifiée.}}$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}'$ tel que $\mathcal{A}_n$ soit vérifiée.

Alors, en développant d'abord par rapport à la dernière colonne, puis en développant par rapport à la dernière ligne le premier déterminant obtenu et en appliquant l'hypothèse de récurrence au second,

$$\delta_{n+1} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \ddots & X-1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} + (X-1)\delta_n \tag{2.1}$$

$$= -(X-1)^{n-1} + (X-n)(X-1)^{n-1} \tag{2.2}$$

$$= (X-(n+1))(X-1)^{(n+1)-2},$$

donc $\boxed{\mathcal{A}_{n+1} \text{ est vérifiée.}}$

Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}',\ \delta_n = (X-n)(X-1)^{n-2}.}$$

Remarque. Développer par rapport à la deuxième ligne au début de l'hérédité est légèrement plus rapide.

Méthode 2 (retomber sur un résultat précédent)

Soit $n \in \mathbb{N}'$ tel que $n \geqslant 3$ (le cas $n = 2$ est immédiat). On effectue un début de pivot avec les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$, pour $i \in [\![2, n]\!]$, puis on développe par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\delta_n = \det\left((X-1)\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{U}_{n-1,n-1}\right) \tag{2.3}$$

$$= (-1)^{n-1} \det\left((1-X)\mathrm{I}_{n-1} + \mathrm{U}_{n-1,n-1}\right) \tag{2.4}$$

$$= (-1)^{n-1} \chi_{K_{n-1}}(n-X) \tag{2.5}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-X)(1-X)^{n-2} \tag{2.6}$$

$$= \boxed{(X-n)(X-1)^{n-2}.}$$

Méthode 3 (la plus rapide)

Soit $n \in \mathbb{N}'$. On effectue, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}(X))$, l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 - \frac{1}{X-1} \sum_{j=2}^{n} C_j,$$

qui donne une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux

$$\frac{X-n}{X-1}, X-1, \ldots, X-1$$

sont de produit

$$\boxed{\delta_n = (X-n)(X-1)^{n-2}.}$$

---

8. En déduire le spectre de S_n.
On précisera les multiplicités de ses valeurs propres dans son polynôme caractéristique, ainsi que les dimensions de ses espaces propres.

Par ajout à la première ligne de toutes les suivantes, puis mise en facteur de X,

$$\chi_{S_n} = \begin{vmatrix} X-n+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X\delta_n = \boxed{X(X-n)(X-1)^{n-2}}$$

et il admet donc 0 et n comme racines simples et, lorsque $n \geqslant 3$, 1 comme racine de multiplicité $n-2$. En particulier,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(S_2) = \{0,2\} \text{ et pour } n \geqslant 3,\ \mathrm{Sp}(S_n) = \{0,1,n\}.}$$

Comme S_n est symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc la dimension de chacun de ses sous-espaces propres est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans son polynôme caractéristique. Ainsi,

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, S_n = \dim \mathrm{Ker}\,(S_n - n\mathrm{I}_n) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Ker}\,(S_n - \mathrm{I}_n) = n-2.}$$

III. Graphes

Un *graphe (non orienté)* Γ est un couple d'ensembles $\Gamma = (S, A)$, où $A \subset \mathcal{P}_2(S)$. Les *sommets* de Γ sont les éléments de S. Les *arêtes* de Γ sont les éléments de A : ce sont des paires de sommets.

Pour deux sommets x et y, on dit que x est *voisin* de y et on note $x \sim y$ si, et seulement si, l'arête $\{x,y\}$ appartient à A. Cette relation est symétrique, puisque $\{x,y\} = \{y,x\}$.

Soient deux sommets x et y. On dit que x est *relié* à y et on note $x \leftrightarrow y$ lorsque la condition suivante est réalisée :

$$\exists\, p \in \mathbb{N},\ \exists\, (z_i)_{i=0}^{p} \in S^{p+1},\ \big(z_0 = x,\ z_p = y \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,p]\!], z_{i-1} \sim z_i\big).$$

Un tel $(p+1)$-uplet est un *chemin de longueur p reliant x à y*.

9. Montrer que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur S.

La relation $\leftrightarrow$ est une $\boxed{\text{relation d'équivalence sur } S}$ car c'est une relation binaire sur S qui est :

- réflexive, car, pour tout $x \in S$ le chemin (x) relie x à x ;
- symétrique, car pour tout $(x,y) \in S^2$, s'il existe un chemin $(z_i)_{i=0}^{p}$ reliant x à y, alors le chemin $(z_{p-i})_{i=0}^{p}$ relie y à x, par symétrie de la relation $\sim$;

- transitive, car pour tout $(x, y, z) \in S^3$, s'il existe un chemin $(z_i)_{i=0}^p$ reliant x à y et un chemin $(t_j)_{j=0}^q$ reliant y à z, alors, en posant, pour $i \in [\![p+1, p+q]\!]$, $z_i = t_{i-p}$, le chemin $(z_i)_{i=0}^{p+q}$ relie x à z.

Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les *composantes connexes* de Γ.

Le graphe Γ est dit *connexe* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in S, \quad x \leftrightarrow y.$$

Cela signifie que Γ a au plus une composante connexe.

On suppose dorénavant que le graphe Γ est connexe.

Pour deux sommets x et y, on note $\mathrm{d}(x, y)$ la plus petite longueur des chemins reliant x à y.

10. Montrer que l'application d est une distance sur l'ensemble S.

L'application d est une distance sur l'ensemble S car c'est une application de S^2 vers $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes.

- Séparation. Soit $(x, y) \in S^2$. Si $x = y$, le chemin de longueur nulle (x) relie x à y, donc $\mathrm{d}(x, y) = 0$. Réciproquement, s'il existe un chemin (z) de longueur nulle de x à y, alors, par définition des chemins, $x = z = y$.
- Symétrie. Soient $(x, y) \in S^2$ et un chemin de longueur minimale $(z_i)_{i=0}^p$ reliant x à y. Alors le chemin $(z_{p-i})_{i=0}^p$ relie y à x, donc $\mathrm{d}(y, x) \leqslant p = \mathrm{d}(x, y)$. En appliquant ce résultat au couple (y, x), on obtient aussi $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(y, x)$, donc $\mathrm{d}(y, x) = \mathrm{d}(x, y)$.
- Inégalité triangulaire. Soient $(x, y, z) \in S^3$, un chemin $(z_i)_{i=0}^p$ de longueur minimale reliant x à y et un chemin $(t_j)_{j=0}^q$ de longueur minimale reliant y à z. On a vu qu'en posant, pour $i \in [\![p+1, p+q]\!]$, $z_i = t_{i-p}$, le chemin $(z_i)_{i=0}^{p+q}$ relie x à z, ce qui prouve que $\mathrm{d}(x, z) \leqslant p + q = \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

---

11. Quels sont les ouverts de S définis par cette distance ?
Quelles sont les applications de S vers $\mathbb{R}$ qui sont continues pour cette distance ?

Pour tout $x \in S$, le singleton $\{x\}$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{2}$, donc est un ouvert. Comme toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute partie $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ de S est ouverte. Ainsi,

toutes les parties de S sont ouvertes pour la distance d.

Comme une application de S vers $\mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ par cette application est un ouvert, alors

toute application de S vers $\mathbb{R}$ est continue.

IV. Laplacien

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe connexe ayant au moins deux sommets.

On suppose que Γ est *de degré uniformément borné*, c'est-à-dire qu'il existe un entier K tel que tout sommet admette au plus K voisins.

Le *degré* $\deg(x)$ d'un sommet x est alors son nombre (fini) de voisins.

On note $E = \mathbb{R}^S$ et

$$H = \ell^2_{\mathbb{R}}(S) = \left\{ f \in E \;\middle|\; \sum_{x \in S} f(x)^2 < +\infty \right\},$$

qu'on munit de son produit scalaire canonique défini par

$$\forall (f, g) \in H \times H, \quad \langle f, g \rangle_H = \sum_{x \in S} f(x) g(x).$$

On définit l'application *laplacien combinatoire* de Γ :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(\Delta f : x \longmapsto \deg(x)\, f(x) - \displaystyle\sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} f(y) \right) \end{array} \right. .$$

Les éléments de $\operatorname{Ker} \Delta$ sont appelés les *fonctions harmoniques* sur Γ.

12. Montrer que Δ est bien définie et que c'est un endomorphisme de E non injectif.

L'application $\boxed{\Delta \text{ est bien définie}}$ car, pour tous $f \in E$ et $x \in S$, la somme intervenant dans la définition de $(\Delta f)(x)$ est finie puisque x n'a qu'un nombre fini de voisins, d'après l'hypothèse faite sur Γ.
Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les applications $\Delta(\lambda f + g)$ et $\lambda(\Delta f) + \Delta g$ sont deux applications de S vers $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in S$,

$$\begin{aligned}
\big(\Delta(\lambda f + g)\big)(x) &= \deg(x)\,(\lambda f + g)(x) - \sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} (\lambda f + g)(y) && (2.7)\\
&= \deg(x)\,\big(\lambda\, f(x) + g(x)\big) - \sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} \big(\lambda\, f(y) + g(y)\big) && (2.8)\\
&= \lambda \deg(x)\, f(x) + \deg(x)\, g(x) - \lambda \sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} f(y) - \sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} g(y) && (2.9)\\
&= \lambda(\Delta f)(x) + (\Delta g)(x) && (2.10)\\
&= \big(\lambda(\Delta f) + \Delta g\big)(x),
\end{aligned}$$

donc

$$\Delta(\lambda f + g) = \lambda(\Delta f) + \Delta g.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(E).}$$

Comme les fonctions constantes sont harmoniques, le noyau de Δ est non trivial, donc

$$\boxed{\Delta \text{ n'est pas injectif.}}$$

13. On étudie dans cette question deux exemples infinis.

(a) On prend ici $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{N}} = \big(\mathbb{N}, \big\{\{n, n+1\};\ n \in \mathbb{N}\big\}\big)$.
Montrer que $\operatorname{Ker}\Delta$ est une droite et que Δ est surjectif.

Soit $g \in E$. Déterminons ses antécédents par Δ en effectuant une analyse-synthèse.
Analyse. Soit $f \in E$ telle que $\Delta f = g$.
On a alors $f(0) - f(1) = (\Delta f)(0) = g(0)$, donc $\boxed{f(1) = f(0) - g(0).}$
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}'$, $2f(n-1) - f(n-2) - f(n) = (\Delta f)(n-1) = g(n-1)$, *i.e.* $\boxed{f(n) = 2f(n-1) - g(n-1) - f(n-2).}$
Synthèse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ définie par

$$f(0) = \lambda, \quad f(1) = \lambda - g(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}',\ f(n) = 2f(n-1) - g(n-1) - f(n-2).$$

En « remontant les calculs », on voit que $\boxed{\Delta f = g.}$
Ainsi, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, g admet un unique antécédent f tel que $f(0) = \lambda$. On en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est surjectif.}}$$

De plus, lorsque $g = 0$, l'application $(n \longmapsto \lambda)$ de S vers $\mathbb{R}$, étant harmonique et valant λ en 0, est cet unique antécédent, donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Vect}(n \longmapsto 1).}$$

Remarque. On peut montrer par récurrence que l'unique antécédent de g valant λ en 0 est $n \longmapsto \lambda - \sum_{k=1}^{n} k\, g(n-k)$, mais ce n'était pas nécessaire ici.

(b) On prend ici $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Z}} = \big(\mathbb{Z}, \big\{\ \{n, n+1\}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\big\}\big)$.
Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$.
Est-ce que Δ est surjectif ?

Soit $g \in E$. Comme dans la question précédente, on voit que les antécédents de g sont les $f \in E$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}',\ f(n) = 2f(n-1) - g(n-1) - f(n-2) \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(-n) = 2f(-n+1) - g(-n+1) - f(-n+2). \end{cases}$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, il existe donc un unique antécédent de g valant λ en 0 et μ en 1, ce qui prouve que

$$\boxed{\Delta \text{ est surjectif.}}$$

De plus, pour $g = 0$, $\big(n \longmapsto \lambda + n(\mu - \lambda)\big)$, étant harmonique et valant λ en 0 et μ en 1, est cet unique antécédent. ce qui prouve que $\operatorname{Ker}\Delta$ est engendré par $(n \longmapsto 1)$ et $(n \longmapsto n)$, qui sont deux vecteurs de E non colinéaires, donc

$$\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}\Delta \text{ est } (n \longmapsto 1, n \longmapsto n).}$$

On revient au cas général.

14. Montrer que $H = E$ si, et seulement si, S est fini.

Si S est fini, pour tout $f \in E$ la somme finie de réels, $\sum_{x\in S} f(x)^2$ est un réel, donc $f \in H$ et comme $H \subset E$ par sa définition, $H = E$.
Si S est infini, l'élément $f : x \longmapsto 1$ de E n'est pas dans H, puisque $\sum_{x\in S} f(x)^2 = \sum_{x\in S} 1 = +\infty$.
Ainsi,

$$\boxed{H = E \text{ si, et seulement si, } S \text{ est fini.}}$$

---

15. Montrer que H est stable par Δ.

On rappelle que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^N$,

$$\forall (a_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N, \quad \left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^2 \leqslant N \sum_{i=1}^N a_i^2.$$

Remarquons que, pour $f \in E$ et $x, y \in S$ voisins, la quantité $(f(x)-f(y))^2$ ne dépend pas de l'ordre entre x et y et ne dépend donc que de l'arête $\{x, y\}$, puis qu'on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, la majoration dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$(\star) : \quad \boxed{\sum_{\{x,y\}\in A} (f(x)-f(y))^2} \leqslant 2 \sum_{\{x,y\}\in A} (f(x)^2 + f(y)^2) \boxed{\leqslant 2K \sum_{x\in S} f(x)^2.}$$

Soit $f \in H$. Alors, $\Delta f \in E$ par définition de Δ et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité $(\star)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in S} (\Delta f)(x)^2 &= \sum_{x\in S} \left(\sum_{\substack{y\in S \\ y\sim x}} (f(x)-f(y)) \right)^2 && (2.11)\\
&\leqslant \sum_{x\in S} \left(K \sum_{\substack{y\in S \\ y\sim x}} (f(x)-f(y))^2 \right) && (2.12)\\
&= 2K \sum_{\{x,y\}\in A} (f(x)-f(y))^2 && (2.13)\\
&\leqslant 4K^2 \sum_{x\in S} f(x)^2 && (2.14)\\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta f \in H.}$$

On note Δ_H l'endomorphisme induit par Δ sur H.

16. Est-ce que Δ_H est continu pour la norme associée au produit scalaire canonique ?

D'après le calcul précédent,

$$\forall f \in H, \quad \|\Delta f\|_H \leqslant 2K \|f\|_H ,$$

donc

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta_H \text{ est continu.}}$$

---

17. Montrer soigneusement que

$$\forall f, g \in H, \quad \langle f, \Delta_H\, g\rangle_H = \sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)).$$

On justifiera d'abord la notation du membre de droite, puis son existence.
En déduire que Δ_H est autoadjoint.

Soient $f, g \in H$.
Pour deux sommets voisins x et y, la quantité $(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))$ ne dépend pas de l'ordre entre x et y, donc ne dépend que de l'arête $\{x, y\} \in A$.
On peut ainsi définir la quantité suivante et la majorer en utilisant d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^A$, puis l'inégalité $(\star)$ prouvée en question **15**

$$\left(\sum_{\{x,y\}\in A} |(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))^2\right)\left(\sum_{\{x,y\}\in A} (g(x) - g(y))^2\right) \tag{2.15}$$

$$\leqslant 4K^2 \|f\|^2 \|g\|^2 \tag{2.16}$$

$$< +\infty.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{\{x,y\}\in A} |(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))| < +\infty$, donc

$$\boxed{\text{la famille } \Big((f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))\Big)_{\{x,y\}\in A} \text{ est sommable,}}$$

ce qui permet de définir $\displaystyle\sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))$.

De manière analogue,

$$\left(\sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} |f(x)(g(x) - g(y))|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} f^2(x)\right)\left(\sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} (g(x) - g(y))^2\right) \tag{2.17}$$

$$\leqslant K \|f\|^2 \cdot 2 \sum_{\{x,y\}\in A} (g(x) - g(y))^2 \tag{2.18}$$

$$\leqslant 4K^2 \|f\|^2 \|g\|^2 ,$$

donc la famille $\Big(f(x)\big(g(x)-g(y)\big)\Big)_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}}$ est sommable, ce qui justifie le calcul suivant, le premier terme étant défini car f et $\Delta_H\, g$ sont des éléments de H :

$$2\langle f, \Delta_H\, g\rangle_H = 2\sum_{x\in S}\left(f(x)\sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}}(g(x)-g(y))\right) \tag{2.19}$$

$$= 2\sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} f(x)(g(x)-g(y)) \tag{2.20}$$

$$= \sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} f(x)(g(x)-g(y)) + \sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} f(y)(g(y)-g(x)) \tag{2.21}$$

$$= \sum_{\substack{(x,y)\in S^2\\ y\sim x}} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \tag{2.22}$$

$$= 2\sum_{\{x,y\}\in A}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)),$$

et donc :

$$\boxed{\langle f, \Delta_H\, g\rangle_H = \sum_{\{x,y\}\in A}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)).}$$

Remarque. Ce calcul redonne une preuve de la sommabilité de la famille

$$\Big(\big(f(x)-f(y)\big)\,\big(g(x)-g(y)\big)\Big)_{\{x,y\}\in A},$$

donc on peut se passer de la première majoration, quitte à « bousculer » l'ordre dans lequel les choses étaient demandées.

Par symétrie du produit scalaire,

$$\langle f, \Delta_H\, g\rangle_H = \sum_{\{x,y\}\in A}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \tag{2.23}$$

$$= \sum_{\{x,y\}\in A}(g(x)-g(y))(f(x)-f(y)) \tag{2.24}$$

$$= \langle g, \Delta_H\, f\rangle_H \tag{2.25}$$

$$= \langle \Delta_H\, f, g\rangle_H,$$

donc

$$\boxed{\Delta_H \text{ est autoadjoint.}}$$

V. Cas fini

On suppose dans cette partie que le graphe Γ est *fini*, c'est-à-dire que S est fini.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $S = [\![1, n]\!]$, avec n un élément de $\mathbb{N}'$.
On peut alors identifier E à $\mathbb{R}^n$, en assimilant un élément f de E au vecteur

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathrm{Mat}_e(\Delta)$ est appelée la *matrice laplacienne* de Γ.

18. Est-ce que Δ est surjectif ?
Est-ce que Δ est diagonalisable ?

En tant qu'endomorphisme non injectif (par le point **12**) d'un espace vectoriel de dimension finie,

$$\boxed{\Delta \text{ n'est pas surjectif.}}$$

Comme S est fini, d'après la question **14**, $\Delta = \Delta_H$, donc, en tant qu'endomorphisme autoadjoint d'un espace vectoriel euclidien,

$$\boxed{\Delta \text{ est diagonalisable (en base orthonormale).}}$$

---

19. Utiliser la partie précédente pour montrer que $\mathrm{Ker}\,\Delta$ est une droite vectorielle.

On a vu que les fonctions constantes sont harmoniques.
Montrons la réciproque. Soit f une fonction harmonique. Par la question **17** qu'on peut utiliser car, S étant fini, $E = H$ par la question **14**,

$$\sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))^2 = \langle f, \Delta_H f\rangle_H = \langle f, 0\rangle_H = 0$$

donc, les termes de cette somme étant positifs ou nuls, ils sont tous nuls, ce qui signifie que deux sommets voisins ont même image par f.
Par récurrence immédiate, deux points reliés ont même image par f, puis, le graphe étant connexe, tous les points ont la même image par f, *i.e.* f est constante.
Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\Delta = \mathrm{Vect}\,(x \longmapsto 1).}$$

---

20. Montrer que

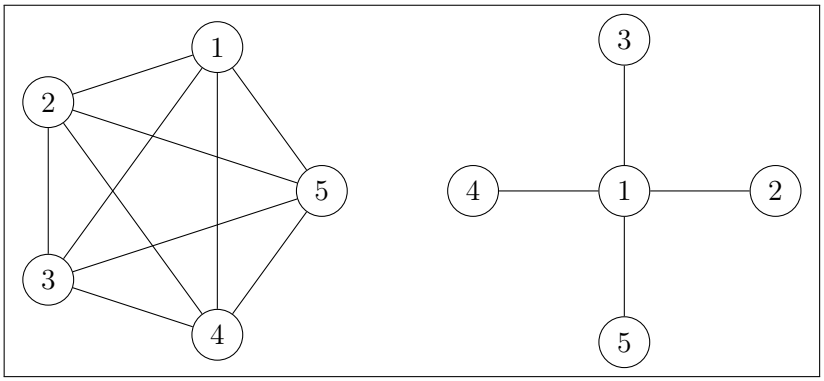
$$\mathrm{Im}\,\Delta = \left\{ f \in E \;\middle|\; \sum_{x\in S} f(x) = 0 \right\}.$$

Comme $E = H$, $\Delta = \Delta_H$ est autoadjoint, donc

$$\mathrm{Im}\,\Delta = (\mathrm{Ker}\,\Delta)^\perp = (x \longmapsto 1)^\perp = \boxed{\left\{ f \in E \mid \sum_{x\in S} f(x) = 0 \right\}.}$$

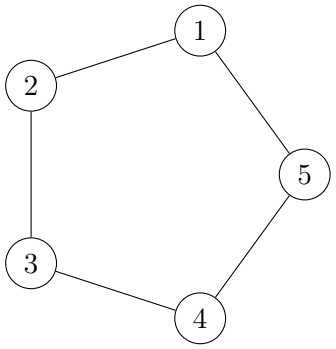
21. Dessiner **sans justification** deux graphes ayant pour matrices laplaciennes K_5 et S_5.
On numérotera leurs sommets et on représentera leurs arêtes par des segments.

Voir la figure 2.1.



Γ_{K_5} à gauche et Γ_{S_5} à droite

22. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère le *graphe cyclique à n sommets*, qu'on voit sur la figure 2.2 pour $n = 5$.



Graphe cyclique à 5 sommets

Formellement, ce graphe est le couple $\big(\llbracket 1, n\rrbracket, \big\{\, \{i, i+1\}\,; i \in \llbracket 1, n-1\rrbracket \big\} \cup \big\{\, \{n, 1\}\,\big\}\big)$.
Donner sans justification sa matrice laplacienne C_n.
Exprimer C_n comme une combinaison linéaire de I_n, J_n et J_n^{-1}, la matrice J_n étant définie, en

désignant par $\overline{k}$ la classe d'un entier k modulo n, comme

$$J_n = (\delta_{\overline{i+1},\overline{j}})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $J_n^{-1} = J_n^{\mathrm{T}}$.
On a alors

$$\boxed{C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},}$$

i.e.

$$\boxed{C_n = 2\mathrm{I}_n - J_n - J_n^{-1}.}$$

---

23. On note $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Montrer que, pour tout élément p de $[\![1, n]\!]$, $\left(\omega_n^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^n$ est un vecteur propre de J_n.

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Alors, puisque $\omega_n^{(p-1)\times n} = (\omega_n^n)^{p-1} = 1 = \omega_n^{(p-1)\times 0}$, on a

$$J_n \left(\omega_n^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^n = \left(\omega_n^{(p-1)\times k}\right)_{k=1}^n = \omega_n^{p-1} \left(\omega_n^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^n,$$

donc

$$\boxed{b_p = \left(\omega_n^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^n \text{ est vecteur propre de } J_n \text{ de valeur propre } \omega_n^{p-1}.}$$

---

24. En déduire une base de vecteurs propres de C_n dans $\mathbb{C}^n$, puis son spectre.
Déterminer soigneusement les multiplicités des valeurs propres.

Comme les vecteurs trouvés dans la question précédente sont associés à des valeurs propres de J_n deux à deux distinctes, ils forment une famille libre de cardinal n en dimension n finie ; donc

$$\boxed{b = (b_p)_{p=1}^n \text{ est une base de } \mathbb{C}^n.}$$

On déduit aussi de la question précédente que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, b_p est vecteur propre de J_n^{-1} de valeur propre $\left(\omega_n^{p-1}\right)^{-1} = \overline{\omega_n^{p-1}}$.
Par combinaison linéaire, b_p est alors vecteur propre de C_n de valeur propre

$$\boxed{\lambda_p} = 2 - \omega_n^{p-1} - \overline{\omega_n^{p-1}} = \boxed{2\left(1 - \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{n}\right)\right).}$$

Ainsi,

$$\boxed{b \text{ est une base de vecteurs propres de } C_n}$$

et $\mathrm{Sp}(C_n) = \{\lambda_p;\ p \in [\![1,n]\!]\}$.
Cependant, il y a des redondances dans cette description. Plus précisément, on distingue deux cas :

- Cas où n est pair. Alors b_1 est associé à la valeur propre 0, $b_{n/2+1}$ à la valeur propre 4 et les valeurs propres λ_p, pour $p \in [\![2, \frac{n}{2}]\!]$ admettent les deux vecteurs propres non colinéaires, b_p et b_{n+2-p} puis, puisque $1 + 1 + \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}-1} 2 = n$, leurs sous-espaces propres sont chacun de dimension 2 et ceux des valeurs propres 0 et 4 sont des droites. Comme C_n est diagonalisable, ces multiplicités géométriques sont aussi leurs multiplicités algébriques. En résumé,

  $$\boxed{\text{pour } n \text{ pair, } \mathrm{Sp}(C_n) = \{0,4\} \cup \left\{\lambda_p;\ p \in [\![2, \tfrac{n}{2}]\!]\right\}.}$$

  et

  $$\boxed{0 \text{ et } 4 \text{ sont valeurs propres simples et toutes les autres sont doubles.}}$$

- Cas où n est impair. Par un raisonnement analogue, le seul changement étant que 4 n'est pas valeur propre, on obtient que

  $$\boxed{\text{pour } n \text{ impair, } \mathrm{Sp}(C_n) = \{0\} \cup \left\{\lambda_p;\ p \in [\![2, \tfrac{n+1}{2}]\!]\right\}.}$$

  et

  $$\boxed{0 \text{ est valeur propre simple et toutes les autres sont doubles.}}$$

---

25. Soit n un élément de $\mathbb{N}'$.
On note L_n la matrice laplacienne du graphe $\left([\![1,n]\!], \left\{\{i, i+1\}; i \in [\![1, n-1]\!]\right\}\right)$.

(a) Soit $x = (x_i)_{i=1}^{2n}$ un vecteur propre de C_{2n} tel que $x_{n+1} = x_n$ et $x_{2n} = x_1$.
Montrer que $x' = (x_i)_{i=1}^{n}$ est un vecteur propre de L_n.

On a

$$\boxed{L_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On note λ la valeur propre de C_{2n} associée à x.
Comme $x_{2n} = x_1$, la première coordonnée de $L_n x'$ est

$$x'_1 - x'_2 = x_1 - x_2 = 2x_1 - x_2 - x_{2n} = \lambda x_1 = \lambda x'_1,$$

comme première coordonnée de $C_{2n}x = \lambda x$.
De la même manière, comme $x_n = x_{n+1}$, la n-ième coordonnée de $L_n x'$ est

$$-x'_{n-1} + x'_n = -x_{n-1} + x_n = -x_{n-1} + 2x_n - x_{n+1} = \lambda x_n = \lambda x'_n.$$

De plus, pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, la i-ème coordonnée de $L_n x'$ est

$$-x'_{i-1} + 2x'_i - x'_{i+1} = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = \lambda x_i = \lambda x'_i.$$

Enfin, $x' \neq 0$: si l'on avait $x' = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$ (car $n \geqslant 2$) et la relation $x_{i+1} = (2-\lambda)x_i - x_{i-1}$, issue de $C_{2n}x = \lambda x$, donnerait de proche en proche $x = 0$, ce qui est exclu. Ainsi,

$$\boxed{x' \text{ est un vecteur propre de } L_n}$$

et

$$\boxed{\text{la valeur propre de } L_n \text{ associée à } x' \text{ est la même que celle de } C_{2n} \text{ associée à } x.}$$

(b) En déduire, par des combinaisons linéaires judicieuses, les éléments propres de L_n.

On note ici, pour $p \in [\![1, 2n]\!]$,

$$b_p = \left(\omega_{2n}^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^{2n} \quad \text{et} \quad \lambda_p = 2\left(1 - \cos\left(\frac{(p-1)\pi}{n}\right)\right),$$

qui sont des vecteurs propres de C_{2n} avec leurs valeurs propres respectives, d'après la question **24**.
Remarquons que, b_1 ayant toutes ses coordonnées égales à 1, il vérifie les conditions de la question **25**a et qu'on retrouve ainsi le fait déjà vu suivant :

$$\boxed{f_1 = (1)_{k=1}^n \text{ est vecteur propre de } L_n \text{ associé à la valeur propre } \lambda_1 = 0.}$$

Soit $p \in [\![2, n]\!]$. Remarquons que

$$b_{2n+2-p} = \left(\omega_{2n}^{(2n+1-p)(k-1)}\right)_{k=1}^{2n} = \left(\omega_{2n}^{(1-p)(k-1)}\right)_{k=1}^{2n} = \left(\omega_{2n}^{(p-1)(1-k)}\right)_{k=1}^{2n},$$

donc

$$\widetilde{f_p} = \omega_{2n}^{p-1} b_p + b_{2n+2-p} = \left(\omega_{2n}^{(p-1)\times k} + \omega_{2n}^{(p-1)(1-k)}\right)_{k=1}^{2n}.$$

Ce vecteur a comme n-ième coordonnée

$$\omega_{2n}^{(p-1)\times n} + \omega_{2n}^{(p-1)(1-n)} = \omega_{2n}^{(p-1)\times n} + \omega_{2n}^{(p-1)(n+1)}$$

et comme $(n+1)$-ième coordonnée

$$\omega_{2n}^{(p-1)(n+1)} + \omega_{2n}^{(p-1)(-n)} = \omega_{2n}^{(p-1)(n+1)} + \omega_{2n}^{(p-1)\times n},$$

qui sont égales.

Il a comme $(2n)$-ième coordonnée

$$\omega_{2n}^{(p-1)(2n)} + \omega_{2n}^{(p-1)(1-2n)} = 1 + \omega_{2n}^{p-1}$$

et comme première coordonnée

$$\omega_{2n}^{p-1} + \omega_{2n}^{0} = \omega_{2n}^{p-1} + 1,$$

qui sont égales.
De plus, comme combinaison linéaire de deux vecteurs propres de C_{2n} associés à la valeur propre λ_p, $\widetilde{f}_p$ est vecteur propre de C_{2n} associé à la valeur propre λ_p.
Le vecteur $\widetilde{f}_p$ vérifiant les hypothèses de la question **25**a,

$$\boxed{f_p = \left(\omega_{2n}^{(p-1)\times k} + \omega_{2n}^{(p-1)(1-k)}\right)_{k=1}^{n} \text{ est vecteur propre de } L_n \text{ associé à la valeur propre } \lambda_p.}$$

Ce vecteur est bien non nul, puisque sa première coordonnée vaut $\omega_{2n}^{p-1}+1 \neq 0$, car $0 \leqslant p-1 \leqslant n-1$.
Remarque. La matrice L_n étant symétrique réelle, on peut préférer des vecteurs propres réels : comme $f_p = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-1)\pi/(2n)} \left(\cos \frac{(p-1)(2k-1)\pi}{2n}\right)_{k=1}^{n}$, le vecteur $\left(\cos \frac{(p-1)(2k-1)\pi}{2n}\right)_{k=1}^{n}$ est un vecteur propre réel de L_n associé à λ_p.
Puisque les valeurs propres λ_p, pour $p \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distinctes et $L_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a ainsi tout le spectre :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(L_n) = \left\{2\left(1 - \cos\left(\frac{(p-1)\pi}{n}\right)\right) ;\ p \in [\![1, n]\!]\right\},}$$

et

$$\boxed{\text{toutes les valeurs propres sont simples.}}$$

VI. Graphe de Cayley et croissance

On considère ici un groupe $(G, \cdot)$ de *type fini*, *i.e.* qui possède une partie génératrice finie Z.

Quitte à l'enlever, on peut supposer que le neutre 1_G de G n'appartient pas à Z.

Quitte à rajouter certains inverses de ses éléments, on peut aussi supposer que la partie Z est *symétrique*, c'est-à-dire que, pour tout élément a de Z, a^{-1} appartient aussi à Z.

Une telle partie génératrice sera appelée ici un *système générateur*.

Le *graphe (non orienté) de Cayley* $\Gamma(G, Z)$ du groupe G muni du système générateur Z est le graphe (S, A), où :

- l'ensemble S des sommets est G lui-même ;
- l'ensemble des arêtes est $A = \big\{\{x, xa\} ;\ (x, a) \in G \times Z\big\}$.

(Bien remarquer que $\{x, xa\}$ et $\big\{xa, (xa)a^{-1}\big\}$ ne forment qu'une seule et même arête.)

26. Déterminer, parmi les graphes définis dans les questions **13**a, **13**b, **21**, **22** et **25**, lesquels sont des graphes de Cayley, en précisant à chaque fois le groupe et le système générateur choisis et en justifiant les réponses négatives.

Remarquons que, dans un graphe de Cayley $\Gamma(G, Z)$, tout sommet x a exactement $\mathrm{Card}\, Z$ voisins, puisque l'application $y \longmapsto xy$ est bijective de G vers G.
Ainsi,

le graphe $\Gamma_{\mathbb{N}}$ de la question **13**a n'est pas un graphe de Cayley,

puisque le sommet 0 a un seul voisin alors que les autres en ont deux.
De même,

le graphe Γ_{S_5} de la question **21** n'est pas un graphe de Cayley,

puisque 1 a strictement plus de voisins que les autres sommets et,

dès que $n \geqslant 3$, le graphe Γ_{L_n} de la question **25** n'est pas un graphe de Cayley.

En revanche,

le graphe $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ de la question **13**b est le graphe de Cayley $\Gamma\big(\mathbb{Z}, \{-1, 1\}\big)$,

le graphe Γ_{K_5} de la question **21** est le graphe de Cayley $\Gamma\big(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}\big)$,

le graphe Γ_{C_n} de la question **22** est le graphe de Cayley $\Gamma\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{-\overline{1}, \overline{1}\}\big)$

et

le graphe Γ_{L_2} de la question **25** est le graphe de Cayley $\Gamma\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{\overline{1}\}\big)$.

On définit la *fonction de croissance* de (G, Z) par

$$\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \mathrm{Card}\,\big(B(1_G, k)\big), \end{array} \right.$$

où $B(1_G, k)$ est la boule fermée de centre 1_G et de rayon k pour la distance de la question **10**.

On dit que la *croissance* de (G, Z) est :

- *polynomiale* lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $\beta(k) \underset{k\to+\infty}{=} O(k^n)$;
- *polynomiale de degré n* si, de plus, $k^n \underset{k\to+\infty}{=} O\big(\beta(k)\big)$;
- *exponentielle* lorsqu'il existe un réel $c > 1$ tel que $c^k \underset{k\to+\infty}{=} O\big(\beta(k)\big)$;
- *intermédiaire* lorsque sa croissance n'est ni polynomiale, ni exponentielle.

27. On note C le cardinal de Z.
Montrer que, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^\star$, $\beta(k) - \beta(k-1) \leqslant C(C-1)^{k-1}$.
Commenter la définition de la croissance exponentielle ainsi que le mot « intermédiaire ».

Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, puisque $B(1_G, k-1) \subset B(1_G, k)$, alors $\beta(k) - \beta(k-1)$ est le cardinal de la sphère de centre 1_G et de rayon k

$$S(1_G, k) = \{x \in G \mid \mathrm{d}(1_G, x) = k\}.$$

On raisonne par récurrence en posant, pour $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathcal{P}_k : \quad \beta(k) - \beta(k-1) \leqslant C(C-1)^{k-1}.$$

Initialisation. Comme $S(1_G, 1) = Z$, alors $\beta(1) - \beta(0) = C \leqslant C$, donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}_k$.
Par définition de la distance d en question **10**, pour chaque élément x de $S(1_G, k+1)$, il existe au moins un voisin x' de x dans $S(1_G, k)$, ce qui permet de construire une application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} S(1_G, k+1) & \longrightarrow & S(1_G, k) \\ x & \longmapsto & x'. \end{array} \right.$$

Comme, à son tour, chaque élément y de $S(1_G, k)$ a au moins un voisin à distance $k-1$ de 1_G, il a au plus $C-1$ voisins dans $S(1_G, k+1)$, donc au plus $C-1$ antécédents par f. Ainsi,

$$\beta(k+1) - \beta(k) = \operatorname{Card} S(1_G, k+1) \leqslant (C-1) \operatorname{Card} S(1_G, k) = (C-1)\big(\beta(k) - \beta(k-1)\big),$$

puis, par hypothèse de récurrence,

$$\beta(k+1) - \beta(k) \leqslant (C-1)C(C-1)^{k-1} = C(C-1)^{(k+1)-1},$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.
Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \beta(k) - \beta(k-1) \leqslant C(C-1)^{k-1}.}$$

On en déduit par télescopage, pour $C \geqslant 3$, l'inégalité

$$(\star\star) : \quad \beta(k) \leqslant 1 + C\frac{(C-1)^k - 1}{C-2},$$

dont on déduit que

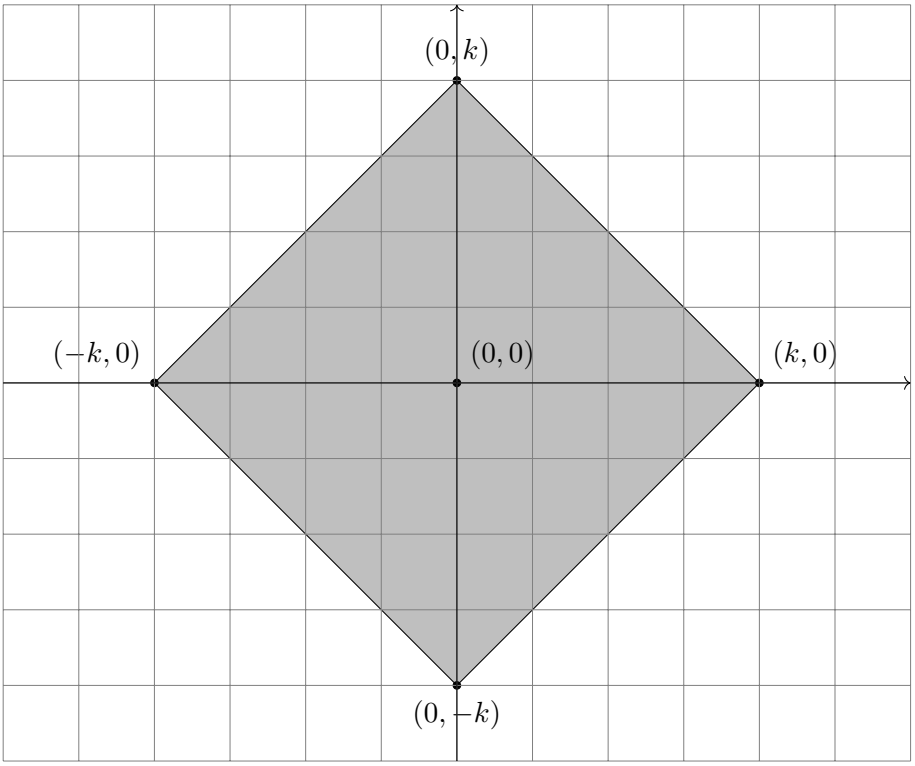
$$\beta(k) = O\left((C-1)^k\right),$$

et donc que la suite $\big(\beta(k)\big)$ est dominée par une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1. C'est aussi clairement le cas lorsque $C \leqslant 2$.
Pour montrer que $\big(\beta(k)\big)$ est « à croissance exponentielle », il n'y a donc pas besoin de dominer cette suite, puisqu'elle ne peut pas croître « plus fortement » qu'exponentiellement.
De plus, si $\big(\beta(k)\big)$ ne croît ni polynomialement, ni exponentiellement, elle croît ainsi plus fortement que toute suite polynomiale et moins fortement que toute suite géométrique de raison strictement supérieure à 1, d'où la terminologie de croissance « intermédiaire ».

---

28. On munit $(\mathbb{Z}^2, +)$ du système générateur $Z_{can} = \big\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\big\}$.
Dessiner sans justification la boule $B\big((0,0), k\big)$ pour k dans $\mathbb{N}^\star$.
En déduire une formule explicite pour la fonction de croissance de $(\mathbb{Z}^2, Z_{can})$.

On voit $B\big((0,0), k\big)$ sur la figure 2.3.
On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,



Boule de $\Gamma(\mathbb{Z}^2, Z_{can})$ de centre $(0,0)$ et de rayon k

$$\beta(k) = 1 + 4\sum_{p=1}^{k} p = 2k^2 + 2k + 1.$$

---

29. Soit G un groupe de type fini.

(a) Montrer que le type de croissance de (G, Z), ainsi, le cas échéant, que son degré de croissance polynomiale, ne dépendent pas du système générateur Z choisi.
On peut donc parler du *type de croissance du groupe G*.

Soient Z_1, Z_2 deux systèmes générateurs de G.

On note Γ_1, Γ_2 les graphes de Cayley, $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ les distances sur G, $B_1(\dots), B_2(\dots)$ les boules et β_1, β_2 les fonctions de croissance correspondants.

Soient $N = \max\limits_{z\in Z_1} \mathrm{d}_2(1_G, z)$ et $M = \max\limits_{z\in Z_2} \mathrm{d}_1(1_G, z)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in B_1(1_G, k)$, x s'écrit comme un produit d'éléments de Z_1 en nombre inférieur ou égal à k, donc $\mathrm{d}_2(1_G, x) \leqslant kN$ et $x \in B_2(1_G, Nk)$. Ainsi, $B_1(1_G, k) \subset B_2(1_G, Nk)$ et, en inversant les rôles, $B_2(1_G, k) \subset B_1(1_G, Mk)$, donc

$$\beta_1(k) \leqslant \beta_2(Nk) \quad \text{et} \quad \beta_2(k) \leqslant \beta_1(Mk).$$

Si Γ_2 est à croissance polynomiale, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que, lorsque k tend vers $+\infty$, $\beta_2(k) = O(k^n)$, donc $\beta_2(Nk) = O(N^n k^n) = O(k^n)$ et, *a fortiori*, $\beta_1(k) = O(k^n)$, donc Γ_1 est à croissance polynomiale.

De la même manière, si Γ_1 est à croissance polynomiale, Γ_2 aussi.

De plus, si l'un des deux a une croissance polynomiale de degré n, les inégalités ci-dessus prouvent que l'autre aussi. En effet, si $k^n = O\big(\beta_2(k)\big)$, alors, pour $k \geqslant 2M$, par croissance de β_1, $\beta_1(k) \geqslant \beta_1\big(M\,\lfloor k/M \rfloor\big) \geqslant \beta_2\big(\lfloor k/M \rfloor\big)$ et $\lfloor k/M \rfloor \geqslant \frac{k}{2M}$, d'où $k^n = O\big(\beta_1(k)\big)$.

Supposons maintenant que Γ_1 soit à croissance exponentielle. Alors, il existe un $c > 1$ tel que, lorsque k tend vers $+\infty$, $c^k = O(\beta_1(k))$, donc, par croissance de β_2,

$$\left(c^{\frac{1}{N}}\right)^k = c \cdot c^{\frac{k}{N}-1} \leqslant c \cdot c^{\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor} = O\left(\beta_1\left(\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor\right)\right) = O\left(\beta_2\left(N\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor\right)\right) = O\left(\beta_2(k)\right)$$

et comme $c^{\frac{1}{N}} > 1$, Γ_2 est à croissance exponentielle.
De la même manière, si Γ_2 est à croissance exponentielle, Γ_1 aussi.
On a montré que Γ_1 est à croissance polynomiale (respectivement exponentielle) si, et seulement si, Γ_2 l'est.
Donc, par définition de la croissance intermédiaire, Γ_1 est à croissance intermédiaire si, et seulement si, Γ_2 l'est.
Ainsi,

le type de croissance de (G, Z) ne dépend pas du système générateur Z choisi

et, pour $n \in \mathbb{N}$,

le fait d'être de croissance polynomiale de degré n n'en dépend pas non plus.

(b) Montrer que si G est abélien, alors sa croissance est polynomiale.

Supposons que G soit abélien.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B(1_G, k) = \left\{ \prod_{z \in Z} z^{\alpha_z};\ (\alpha_z)_{z\in Z} \in \mathbb{N}^Z, \sum_{z\in Z} \alpha_z \leqslant k \right\}$$

donc

$$\beta(k) \leqslant \text{Card}\left\{ (\alpha_z)_{z\in Z} \in \mathbb{N}^Z \,\middle|\, \sum_{z\in Z} \alpha_z \leqslant k \right\} \leqslant (k+1)^{\text{Card } Z} = O\left(k^{\text{Card } Z}\right)$$

et

G est à croissance polynomiale.

Remarque. On peut bien sûr avoir une majoration plus fine, en commençant, pour chaque élément de Z différent de son inverse, à n'en garder qu'un des deux pour l'écriture des éléments de la boule.

VII. Groupe de Heisenberg discret

Soit H_3 le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ engendré par les trois matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $Z = \left\{S, S^{-1}, T, T^{-1}, U, U^{-1}\right\}$, d la distance sur $\Gamma(\mathrm{H}_3, Z)$ et, pour tout élément X du groupe H_3, $|X| = \mathrm{d}(\mathrm{I}_3, X)$.

30. (a) Calculer $S^k T^\ell U^m$ pour k, ℓ, m éléments de $\mathbb{Z}$.
En déduire que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathrm{H}_3 \\ (k,\ell,m) & \longmapsto & S^k T^\ell U^m \end{array} \right.$ est bijective.

Pour $k, k' \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+k' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\varphi : \ k \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ vers $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, tel que $\varphi(1) = S$.
On a alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S^k = \varphi(1)^k = \varphi(k \cdot 1) = \varphi(k)$.
Par des calculs et raisonnements analogues, on obtient, pour tous $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$:

$$S^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix}, \quad U^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$S^k T^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$S^k T^\ell U^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix}}.$$

L'application f est bien définie puisque H_3 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, donc stable par passage à l'inverse et produit.
Par la forme matricielle calculée ci-dessus, f est immédiatement injective.
Par ailleurs, le produit de deux matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux égaux à 1 est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1. Comme les éléments de H_3 sont des produits d'éléments de Z, par récurrence immédiate, tout élément de H_3 est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1. Comme tout produit de matrices à coefficients entiers est une matrice à coefficients entiers, tout élément de H_3 s'écrit sous la forme $S^k T^\ell U^m$, avec $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$, *i.e.* f est surjective, *i.e.*

$$\mathrm{H}_3 = \left\{ S^k T^\ell U^m \mid k, \ell, m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{array} \right) \middle| \ k, \ell, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est bijective.}}$$

(b) Pour $k, \ell, m, k', \ell', m'$ appartenant à $\mathbb{Z}$, expliciter k'', ℓ'', m'' dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$S^k T^\ell U^m S^{k'} T^{\ell'} U^{m'} = S^{k''} T^{\ell''} U^{m''}.$$

Le groupe H_3 est-il commutatif ?

Quel est le sous-groupe de H_3 engendré par $\{S,T\}$?

Soient $k,\ell,m,k',\ell',m' \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(S^kT^\ell U^m)(S^{k'}T^{\ell'}U^{m'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k' & 1 & 0 \\ m' & \ell' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+k' & 1 & 0 \\ m+m'+\ell k' & \ell+\ell' & 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\boxed{(S^kT^\ell U^m)(S^{k'}T^{\ell'}U^{m'}) = S^{k+k'}T^{\ell+\ell'}U^{m+m'+\ell k'}.}$$

Comme $S^{-1}TST^{-1} = U \neq \mathrm{I}_3$, $ST^{-1} \neq T^{-1}S$, donc

$$\boxed{\mathrm{H}_3 \text{ n'est pas commutatif.}}$$

Comme $U = S^{-1}TST^{-1}$,

$$\boxed{\text{le sous-groupe de } \mathrm{H}_3 \text{ engendré par } \{S,T\} \text{ est } \mathrm{H}_3.}$$

---

31. Montrer que $\quad \forall k,\ell,m \in \mathbb{Z}, \quad \left|S^kT^\ell U^m\right| \leqslant |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|}.$

Commençons par remarquer que, pour tous $X, Y \in \mathrm{H}_3$,

$$|XY| \leqslant |X| + |Y|,$$

ce qui s'étend par récurrence immédiate au produit de n éléments de H_3, pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Par ailleurs, par la formule de l'inverse d'un produit et par symétrie de Z, pour $X \in \mathrm{H}_3$,

$$\left|X^{-1}\right| = \left|X\right|.$$

Remarquons ensuite que, d'après la question **30**b (en prenant $\ell = k' = a$, $k = \ell' = -a$ et $m = m' = 0$ dans la formule), pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $S^{-a}T^aS^aT^{-a} = U^{a^2}$.
Soient maintenant $k,\ell,m \in \mathbb{Z}$, $a = \left\lfloor \sqrt{|m|} \right\rfloor$ et $r = |m| - a^2$.
En appliquant la remarque précédente, on obtient $U^{|m|} = U^{a^2}U^r = S^{-a}T^aS^aT^{-a}U^r$, donc $\left|U^{|m|}\right| \leqslant 4a+r$.
Par ailleurs, par définition de la partie entière, $a \leqslant \sqrt{|m|} < a+1$, donc, les quantités étant positives ou nulles, $a^2 \leqslant |m| < a^2 + 2a + 1$, donc $0 \leqslant r < 2a+1$. Comme r est entier, $0 \leqslant r \leqslant 2a$. Ainsi $\left|U^{|m|}\right| \leqslant 6a$, donc $|U^m| \leqslant 6a$. En remarquant que $a \leqslant \sqrt{|m|}$, on obtient l'inégalité

$$\boxed{\left|S^kT^\ell U^m\right| \leqslant |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|}.}$$

---

32. Soient k,ℓ,m des éléments de $\mathbb{Z}$.
Montrer par récurrence que $|k| + |\ell| \leqslant \left|S^kT^\ell U^m\right|$ et $|m| \leqslant \left|S^kT^\ell U^m\right|^2$.
En déduire que $\frac{1}{2}\left(|k| + |\ell| + \sqrt{|m|}\right) \leqslant \left|S^kT^\ell U^m\right|$.

On démontre les deux premières inégalités par récurrence sur $\left|S^kT^\ell U^m\right|$.

Pour cela, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{P}_n) : \quad \forall k,\ell,m \in \mathbb{Z}, \quad \left(\left|S^kT^\ell U^m\right| = n \Longrightarrow \left(|k|+|\ell| \leqslant n \text{ et } |m| \leqslant n^2\right)\right).$$

Initialisation. Soient $k,\ell,m \in \mathbb{Z}$ tels que $\left|S^kT^\ell U^m\right| = 0$. Alors $S^kT^\ell U^m = \mathrm{I}_3$, puisqu'elle s'écrit comme produit vide. D'après la question **30**a, $k = \ell = m = 0$, donc les deux inégalités sont vérifiées. Ainsi $\boxed{\mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}}$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Soient $k,\ell,m \in \mathbb{Z}$ tels que $\left|S^kT^\ell U^m\right| = n+1$. Notons $X = S^kT^\ell U^m$ et $A_1 \cdots A_{n+1}$ une écriture minimale de X comme produit d'éléments de Z. On note aussi $Y = XA_{n+1}^{-1} = A_1 \cdots A_n$.

Soient alors $k',\ell',m' \in \mathbb{Z}$ les uniques entiers vérifiant $S^{k'}T^{\ell'}U^{m'} = Y$. Par minimalité de l'écriture de X, $\left|S^{k'}T^{\ell'}U^{m'}\right| = n$, donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$|k'|+|\ell'| \leqslant n \quad \text{et} \quad |m'| \leqslant n^2.$$

Cependant, $A_{n+1}^{-1} \in Z = \left\{S, S^{-1}, T, T^{-1}, U, U^{-1}\right\}$.

On obtient les résultats suivants à l'aide de la formule de la question **30**b :

$$\begin{cases} (S^kT^\ell U^m)S &= S^{k+1}T^\ell U^{m+\ell} \\ (S^kT^\ell U^m)S^{-1} &= S^{k-1}T^\ell U^{m-\ell} \\ (S^kT^\ell U^m)T &= S^kT^{\ell+1}U^m \\ (S^kT^\ell U^m)T^{-1} &= S^kT^{\ell-1}U^m \\ (S^kT^\ell U^m)U &= S^kT^\ell U^{m+1} \\ (S^kT^\ell U^m)U^{-1} &= S^kT^\ell U^{m-1}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$(k',\ell',m') \in \{(k+1,\ell,m+\ell),(k-1,\ell,m-\ell),(k,\ell+1,m),(k,\ell-1,m),(k,\ell,m+1),(k,\ell,m-1)\}.$$

Dans les six cas, $|k'|+|\ell'| \geqslant |k|+|\ell|-1$ donc $|k|+|\ell| \leqslant n+1$. En particulier, $|\ell| \leqslant n+1$ et, comme $|1| \leqslant n+1$, alors $|m'| \geqslant |m|-(n+1)$, donc $|m| \leqslant n^2+n+1 \leqslant (n+1)^2$, car $n \geqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est vérifiée,}}$ ce qui achève la preuve de la récurrence.

Alors, pour $k,\ell,m \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(|k|+|\ell|+\sqrt{|m|}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|S^kT^\ell U^m\right| + \left|S^kT^\ell U^m\right|\right) = \left|S^kT^\ell U^m\right|.}$$

---

33. Montrer que la croissance de H_3 est polynomiale d'un degré à préciser.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $S^kT^\ell U^m \in B(\mathrm{I}_3,n)$, on a, d'après la question **32**, $|k|+|\ell| \leqslant n$ et $|m| \leqslant n^2$, donc $(k,\ell,m) \in [\![-n,n]\!]^2 \times [\![-n^2,n^2]\!]$. Ainsi, par la question **30**a,

$$\begin{aligned} \boxed{\beta(n)} &= \operatorname{Card} B(\mathrm{I}_3,n) && (2.26)\\ &= \operatorname{Card}\left\{(k,\ell,m) \in \mathbb{Z}^3 \mid S^kT^\ell U^m \in B(\mathrm{I}_3,n)\right\} && (2.27)\\ &\leqslant \operatorname{Card}\left([\![-n,n]\!]^2 \times [\![-n^2,n^2]\!]\right) && (2.28)\\ &= (2n+1)^2(2n^2+1) && (2.29)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \boxed{O(n^4),} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $q_n = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ et $E = [\![-q_n,q_n]\!]^2 \times [\![-q_n^2,q_n^2]\!]$.

Pour $(k,\ell,m) \in E$, par **31**,

$$\left|S^kT^\ell U^m\right| \leqslant |k|+|\ell|+6\sqrt{|m|} \leqslant 8q_n \leqslant n$$

donc $S^kT^\ell U^m \in B(\mathrm{I}_3, n)$. Ainsi

$$\operatorname{Card} B(\mathrm{I}_3, n) \geqslant \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E = (2q_n+1)^2(2q_n^2+1).$$

Or, $q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{8}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, et par « changement de variable » dans l'équivalent $(2x+1)^2(2x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} 8x^4$,

$$(2q_n+1)^2(2q_n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 8q_n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^4}{512}.$$

Ainsi, $\boxed{n^4 \underset{n\to+\infty}{=} O\big(\beta(n)\big).}$

On a montré que

$$\boxed{\text{la croissance de } \mathrm{H}_3 \text{ est polynomiale de degré 4.}}$$

VIII. Groupe libre

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe.

- On dit que c'est un *arbre* lorsqu'il est connexe et « minimal » pour cette propriété au sens où, pour toute arête $a = \{x, y\}$, x et y ne sont plus reliés dans le graphe $\Gamma' = (S, A \setminus \{a\})$.
- On dit qu'un chemin $(z_0, \dots, z_i, \dots, z_p)$ de Γ admet un *aller-retour en i* $(i \in [\![1, p-1]\!])$ lorsque $z_{i-1} = z_{i+1}$.
- On appelle *lacet* tout chemin de Γ reliant un point à lui-même.

34. Soit $T = (S, A)$ un arbre.

(a) Soient x et y deux sommets distincts à distance p.

Montrer qu'il existe un unique voisin de y à distance $p-1$ de x et que tous ses autres voisins sont à distance $p+1$ de x.

En déduire que tout lacet de longueur non nulle admet un aller-retour.

Comme $x \neq y$, $p \neq 0$.

Soit $c = (z_0, \dots, z_p)$ un chemin minimal de x à y. Alors tout sous-chemin de c est encore minimal, donc, en particulier, le chemin $(z_0, \dots, z_{p-1})$ l'est, donc $\mathrm{d}(x, z_{p-1}) = p-1$. Or $z_{p-1} \sim z_p = y$, donc il existe un voisin de y à distance $p-1$ de x.

Montrons l'unicité par l'absurde.

Supposons qu'il existe $z' \neq z_{p-1}$ voisin de y et à distance $p-1$ de x et notons $(z'_0, \dots, z'_{p-1})$ un chemin de x à z' réalisant cette distance.

Comme tous les z_i et z'_i, pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, sont à distance strictement inférieure à p de x, aucun d'eux n'est égal à y et, puisque $z_{p-1} \neq z' = z'_{p-1}$, le chemin

$$(z'_{p-1}, \dots, z'_1, z_0, \dots, z_p)$$

relie z' à y sans passer par l'arête $\{z', y\}$, ce qui contredit le fait que T est un arbre.

Ainsi,

$$\boxed{\text{il existe un unique voisin de } y \text{ à distance } p-1 \text{ de } x.}$$

Soit z un voisin de y différent de z_{p-1}.
Par inégalité triangulaire, $\mathrm{d}(x,z) \leqslant p+1$ et $\mathrm{d}(x,z) \geqslant p-1$, donc $\mathrm{d}(x,z) \in \{p-1, p, p+1\}$.
Par l'unicité prouvée ci-dessus, comme $z \neq z_{p-1}$, $\mathrm{d}(x,z) \in \{p, p+1\}$.
Montrons par l'absurde que $\mathrm{d}(x,z) \neq p$.
Supposons que $\mathrm{d}(x,z) = p$ et prenons un chemin minimal $(z''_0, \dots, z''_p)$ reliant x à z. Comme précédemment, le chemin

$$(z''_p, \dots, z''_1, z_0, \dots, z_p)$$

relie z à y sans passer par l'arête $\{z, y\}$, ce qui contredit le fait que T est un arbre.
Comme $\mathrm{d}(x,z) \neq p$, $\mathrm{d}(x,z) = p+1$. Ainsi

$$\boxed{\text{tous les autres voisins de } y \text{ sont à distance } p+1 \text{ de } x.}$$

Soit $\ell = (x_0, \dots, x_p)$ un lacet de longueur non nulle (donc supérieure ou égale à 2).
Notons $t = x_0 = x_p$ et $r = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant p} \mathrm{d}(t, x_j)$. Comme le lacet est non trivial, $r \geqslant 1$. On prend alors un $q \in [\![1, p-1]\!]$ réalisant ce maximum. En particulier, comme $r \neq 0$, $x_q \neq t$. Comme x_{q-1} et x_{q+1} sont deux voisins de x_q au moins aussi près de t que x_q, ils sont égaux par le résultat précédent. Ainsi,

$$\boxed{\ell \text{ admet un aller-retour.}}$$

(b) Soient x et y deux sommets de T.
Montrer qu'il existe un unique chemin reliant x à y sans aller-retour.
En déduire que c'est aussi l'unique chemin reliant x à y de longueur $\mathrm{d}(x,y)$.

Soit $c = (z_0, \dots, z_p)$ un chemin de longueur minimale reliant x à y. S'il admettait un aller-retour en $i \in [\![1, p-1]\!]$, le chemin obtenu en supprimant les sommets z_{i-1} et z_i relierait aussi x à y, ce qui contredirait la minimalité de c, donc c n'admet pas d'aller-retour. Ainsi,

$$\boxed{\text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ sans aller-retour.}}$$

Soit $c' = (z'_0, \dots, z'_q)$ différent de c reliant x à y. Comme c est minimal, $p \leqslant q$.
On note alors

$$k = \max\{i \in [\![0, p]\!] \mid (z_0, \dots, z_i) = (z'_0, \dots, z'_i)\}.$$

Remarquons que $k < q$, sinon $q = p$ et $c' = c$. Le lacet

$$\ell = (z'_q, \dots, z'_k, z_{k+1}, \dots, z_p)$$

est alors non trivial (même dans le cas où $k = p$, pour lequel sa « queue » $(z_{k+1}, \dots, z_p)$ est vide). Par la question précédente, ℓ admet un aller-retour qui ne peut être ni situé sur sa queue car c n'admet pas d'aller-retour, ni $(z'_{k+1}, z'_k, z_{k+1})$, lorsque $k < p$, puisqu'alors $z'_{k+1} \neq z_{k+1}$ par définition de k. Cet aller-retour est donc un aller retour de $(z'_q, \dots, z'_k)$, ce qui fournit un aller-retour de c'.
Ainsi, tout chemin de x à y différent de c admet un aller-retour et n'est donc pas minimal, ce qui prouve les deux propriétés voulues :

$$\boxed{\text{il existe un unique chemin } c \text{ sans aller-retour de } x \text{ à } y}$$

et

$$\boxed{c \text{ est aussi l'unique chemin de } x \text{ à } y \text{ de longueur } \mathrm{d}(x,y).}$$

On **admet** l'existence d'un groupe F_2 engendré par deux éléments a et b tels que, d'une part, l'ensemble $Z = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ soit de cardinal 4 et, d'autre part, $\Gamma = \Gamma(\mathrm{F}_2, Z)$ soit un arbre. On note 1 son neutre. Ces notations valent jusqu'à la fin du sujet.

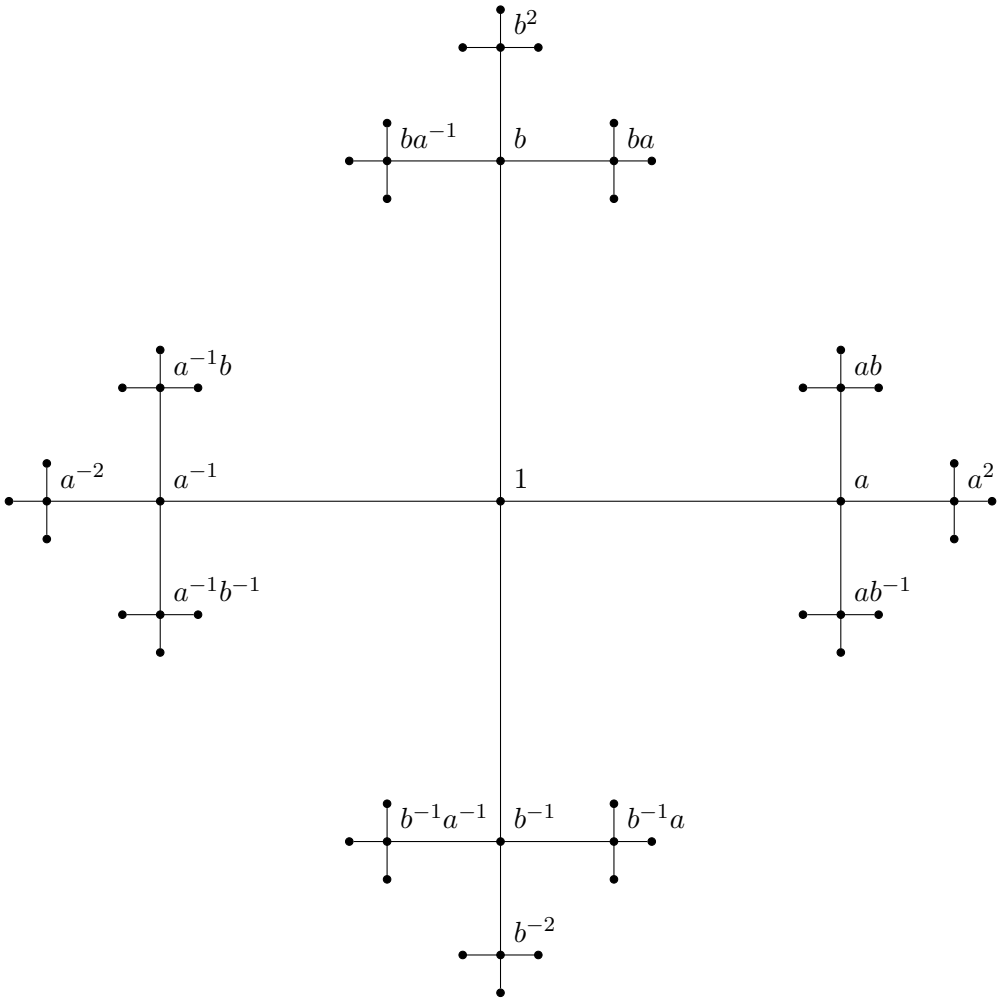
Dans une suite finie ou infinie d'éléments de Z, on appelle *simplification* toute succession d'un élément de Z et de son inverse (aa^{-1}, bb^{-1}, $a^{-1}a$, $b^{-1}b$). Dans le cas d'une suite finie, une simplification peut être retirée sans changer la valeur du produit des éléments de la suite.

Pour un élément x de F_2, on appelle *écriture réduite* de x toute écriture de x comme produit d'une suite finie d'éléments de Z sans simplifications.

On convient que le produit vide d'éléments de Z est une écriture réduite de 1, encore notée 1.

35. Dessiner la boule de Γ de centre 1 et de rayon 3, en nommant les sommets qui sont à distance au plus 2 de l'élément neutre.

Voir la figure 2.4.



Boule de $\Gamma(\mathrm{F}_2, Z)$ de centre 1 et de rayon 3

36. Montrer que chaque élément de F_2 admet une unique écriture réduite.

Soit $x \in \mathrm{F}_2$.
Il y a une correspondance bijective entre les écritures réduites et les chemins de Γ sans aller-retour partants de 1.
D'après la question **34**b, il existe un unique chemin sans aller-retour de 1 à x, donc

$$\boxed{x \text{ admet une unique écriture réduite.}}$$

---

37. Calculer la fonction de croissance de (F_2, Z) et déterminer son type.
En quel sens est-elle maximale ?

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $S_k = \{x \in \mathrm{F}_2 \mid \mathrm{d}(1,x) = k\}$ la sphère de centre 1 et de rayon k.
On note alors $\pi_k : S_{k+1} \longrightarrow S_k$ l'application qui fait correspondre à un élément de S_{k+1} son unique voisin à distance k de 1. Cette application est bien définie d'après la question **34**a.
Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^\star$. Alors, chaque $x \in S_k$ a $\operatorname{Card} Z = 4$ voisins, dont un à distance $k-1$ de 1 et donc trois à distance $k+1$ de 1, *i.e.* x a exactement trois antécédents par π_k. D'après le principe des bergers, $\operatorname{Card} S_{k+1} = 3 \operatorname{Card} S_k$.
Ainsi, $(\operatorname{Card} S_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite géométrique de premier terme $\operatorname{Card} S_1 = 4$ et de raison 3, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \operatorname{Card} S_k = 4 \cdot 3^{k-1}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme la boule fermée de centre 1 et de rayon k est la réunion disjointe des S_j pour $j \in [\![0, k]\!]$,

$$\boxed{\beta(k)} = 1 + 4\sum_{j=1}^{k} 3^{j-1} = 1 + 4\sum_{j=0}^{k-1} 3^j \boxed{= 1 + 2(3^k - 1).}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le groupe libre } \mathrm{F}_2 \text{ est à croissance exponentielle.}}$$

D'après la majoration $(\star\star)$ prouvée dans la résolution de la question **27**, pour tout groupe de type fini G admettant un système générateur Y de cardinal 4, la fonction de croissance de (G, Y) est majorée par celle de (F_2, Z).
Ainsi, la croissance de (F_2, Z) est la croissance $\boxed{\text{maximale}}$ possible pour un groupe de type fini muni d'un système générateur de cardinal 4.

On note Δ le laplacien de Γ.

38. Est-ce que Δ est surjectif ?

Soit $g \in E$.
On définit une fonction f par récurrence (double) sur la distance des points à 1 de la manière suivante.
Initialisation. On pose $f(1) = \frac{g(1)}{4}$ et $f(a) = f(b) = f(a^{-1}) = f(b^{-1}) = 0$, ce qui assure que $(\Delta f)(1) = g(1)$.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Supposons avoir construit f sur S_{k-1} et sur S_k.
On pose alors, pour tout $x \in S_{k+1}$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\Big(4f\big(\pi_k(x)\big) - f\Big(\pi_{k-1}\big(\pi_k(x)\big)\Big) - g\big(\pi_k(x)\big)\Big),$$

ce qui assure que $(\Delta f)|_{S_k} = g|_{S_k}$.
La fonction f ainsi construite vérifie *in fine* $\Delta f = g$.

Ainsi, Δ est surjectif.

Pour un élément x de F_2 dont l'écriture réduite est $x_1x_2\cdots x_k$, on note $x_{\to p} = x_1\cdots x_p$ pour tout p dans $[\![0,k]\!]$. Par convention, $x_{\to 0} = 1$.

On définit aussi le *bord* $\partial\mathrm{F}_2$ de F_2 comme l'ensemble des suites infinies $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'éléments de Z sans simplifications.

Pour un tel φ et un entier naturel p, on définit aussi $\varphi_{\to p} = \varphi_1\cdots\varphi_p$.

Soit φ un élément de $\partial\mathrm{F}_2$ fixé.

Pour un élément x de F_2 d'écriture réduite $x_1x_2\cdots x_k$, on note

$$m = m(x,\varphi) = \max\left\{p\in[\![0,k]\!] \mid x_{\to p} = \varphi_{\to p}\right\}$$

et on pose $b_\varphi(x) = (k-m) - m = k - 2m$.

On définit ainsi la *fonction de Busemann* b_φ du point φ, dont on peut voir les lignes de niveau sur la figure 2.5.

On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : tout sommet x a un unique voisin dans l'ensemble $b_\varphi^{-1}\big(\{b_\varphi(x)-1\}\big)$ et les trois autres dans l'ensemble $b_\varphi^{-1}\big(\{b_\varphi(x)+1\}\big)$.

39. Trouver une fonction harmonique f sur Γ telle que

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\psi\in\partial\mathrm{F}_2\setminus\{\varphi\},\ \lim_{p\to+\infty} f(\psi_{\to p}) = 0.$$

Vérifier que $\lim\limits_{p\to+\infty} f(\varphi_{\to p}) = +\infty$.

On pose $\boxed{f = 3^{-b_\varphi},}$ qui est harmonique car, pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$4\cdot 3^{-k} - 3^{-(k-1)} - 3\cdot 3^{-(k+1)} = 3^{-k}(4-3-1) = 0.$$

De plus, $b_\varphi(1) = 0 - 2\times 0 = 0$, donc f(1)=1.
Soit $\psi\in\partial\mathrm{F}_2\setminus\{\varphi\}$. On pose

$$m = \max\left\{p\in\mathbb{N} \mid \psi_{\to p} = \varphi_{\to p}\right\},$$

qui existe, puisque $\psi\neq\varphi$, et on a, pour $p\geqslant m$,

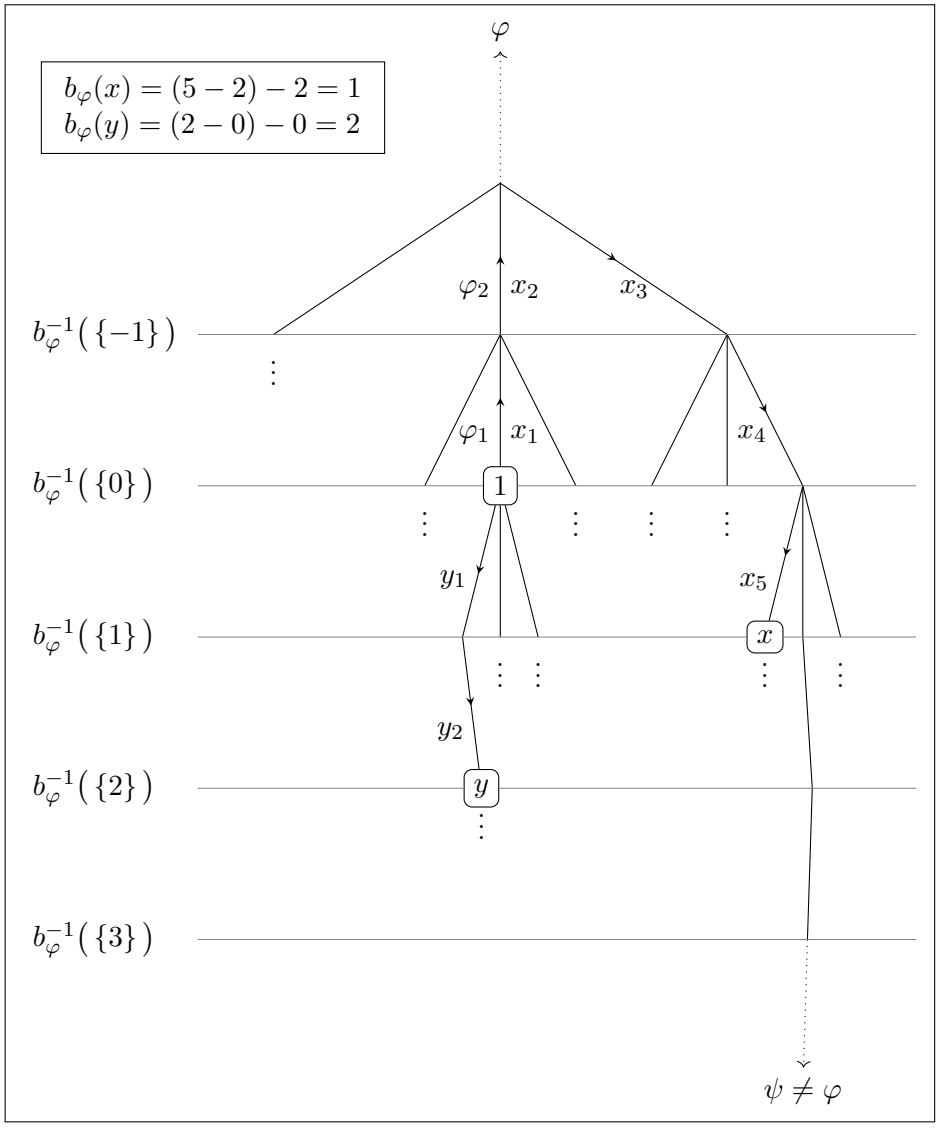
$$f(\psi_{\to p}) = 3^{2m-p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ convient.}}$$

De plus, pour $p\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{f(\varphi_{\to p}) = 3^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$



Lignes de niveau de la fonction b_φ

40. Soient q dans $\mathbb{N}$ et h une fonction harmonique tels que $h(\varphi_{\to q}) = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} h(\psi_{\to p}) = 0$ pour tout point ψ du bord tel que $\psi_{\to q+1} \neq \varphi_{\to q+1}$.
Montrer que h s'annule en tout x de F_2 tel que $m(x,\varphi) \leqslant q$.
En déduire l'unicité de la fonction f précédente.

Commençons par prouver le

Lemme. *Soit g une fonction harmonique sur un arbre T dont chaque sommet admette au moins deux voisins et soient x, y deux sommets voisins de T tels que $g(x) \leqslant g(y)$,*
Alors, il existe un chemin infini injectif $(z_0, z_1, \ldots)$ tel que $z_0 = x$, $z_1 = y$ et tel que la suite $(g(z_p))_p$ soit croissante.

On construit immédiatement par récurrence, avec la définition du laplacien, un chemin infini $(z_0, z_1, \ldots)$ vérifiant $z_0 = x$, $z_1 = y$ et, pour tout $i \geqslant 2$, $z_i \neq z_{i-2}$, tel que la suite $(g(z_p))_p$ soit croissante. Ce chemin est alors injectif, par la question **34**, puisque T est un arbre.

Notons

$$C_q = \{x \in \mathrm{F}_2 \mid m(x,\varphi) \leqslant q\}\,.$$

Soit $x \in C_q$.
Montrons par l'absurde que $h(x) = 0$.

Supposons que $h(x) \neq 0$. Quitte à changer h en $-h$, on peut supposer que $h(x) > 0$. Comme $h(\varphi_{\to q}) = 0$, alors il existe deux sommets consécutifs y_0, y_1 le long du plus court chemin c de $\varphi_{\to q}$ à x tels que $h(y_0) \leqslant h(y_1)$ et $h(y_1) > 0$.
En appliquant le lemme, on obtient un chemin injectif infini $(y_n)_n$ tel que $(h(y_n))_{n\geqslant 1}$ soit strictement positive et croissante, donc ne tende pas vers 0.
Comme $h(y_n) \geqslant h(y_1) > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et $h(\varphi_{\to q}) = 0$, le chemin $(y_n)_{n\geqslant 1}$ ne passe pas par $\varphi_{\to q}$; comme sortir de C_q nécessite de passer par $\varphi_{\to q}$ (puisque Γ est un arbre) et que $y_1 \in C_q$, ce chemin reste dans C_q. De plus, le chemin étant injectif dans un arbre, il existe un rang N à partir duquel $\mathrm{d}(1, y_{n+1}) = \mathrm{d}(1, y_n) + 1$ (la distance à 1 varie de ± 1 à chaque pas, ne peut décroître indéfiniment et, une fois qu'elle a crû, une décroissance créerait un aller-retour), donc, en notant $\psi_1 \cdots \psi_k$ l'écriture réduite de y_N, puis en posant, pour $p > k$, $\psi_p = y_{N+p-1-k}^{-1}\, y_{N+p-k}$, on a exhibé $\psi = (\psi_p)_p \in \partial \mathrm{F}_2$ tel que $\psi_{\to q+1} \neq \varphi_{\to q+1}$ et $(h(\psi_{\to p}))_p$ ne tende pas vers 0, ce qui contredit l'hypothèse faite sur h (on a bien $\psi_{\to q+1} \neq \varphi_{\to q+1}$ puisque les y_n sont dans C_q et de longueur au moins $q+1$ pour n grand).
Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in C_q, \quad h(x) = 0.}$$

Soient deux fonctions $f_1, f_2 \in E$ vérifiant les conditions de la question précédente. Posons $h = f_1 - f_2$, qui est harmonique, comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques, et vérifie $h(1) = 0$.
Notons, pour $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_q : h(\varphi_{\to q}) = 0 \ \text{ et } \ \forall \psi \in \partial \mathrm{F}_2, \left(\psi_{\to q+1} \neq \varphi_{\to q+1} \Longrightarrow \lim_{p\to+\infty} h(\psi_{\to p}) = 0\right).$$

Par ce qui précède, $\mathcal{Q}_q \Longrightarrow h|_{C_q} = 0$.
Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} h(\psi_{\to p}) = 0$ pour tout $\psi \in \partial \mathrm{F}_2 \setminus \{\varphi\}$, alors la deuxième partie de $\mathcal{Q}_q$ est toujours vérifiée.
Cependant, $h(1) = 0$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée, donc $h|_{C_0} = 0$, puis $h(\varphi_{\to 1}) = 0$, car h est harmonique et s'annule sur les trois autres voisins de 1.
Ainsi $\mathcal{Q}_1$ est vérifiée, ce qui permet d'obtenir de la même manière $h(\varphi_{\to 2}) = 0$.
Une récurrence évidente montre que h est nulle sur tous les ensembles C_q et finalement, $h = 0$, *i.e.* $f_1 = f_2$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ de la question précédente est unique.}}$$

On note p_φ cette fonction.

41. Que dire de la dimension de $\operatorname{Ker}\Delta$?

Montrons par contraposition que la famille $(p_\varphi)_{\varphi\in\partial \mathrm{F}_2}$ de $\operatorname{Ker}\Delta$ est libre.
Soit $(\lambda_\varphi)_{\varphi\in\partial \mathrm{F}_2} \in \mathbb{R}^{(\partial \mathrm{F}_2)} \setminus \{0\}$. Alors, il existe $\psi \in \partial \mathrm{F}_2$ tel que $\lambda_\psi \neq 0$ et, en notant $f = \sum\limits_{\varphi} \lambda_\varphi p_\varphi$, par combinaison linéaire finie de limites, en utilisant la question **39**, $f(\psi_{\to p}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, donc $f \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la famille } (p_\varphi)_{\varphi\in\partial \mathrm{F}_2} \text{ est libre}}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta \text{ est de dimension infinie.}}$$

Remarque. Quitte à choisir une numérotation des générateurs possibles à chaque étape de la construction d'un élément de $\partial \mathrm{F}_2$, par exemple en ordonnant Z et en numérotant, dans l'ordre, les générateurs disponibles, on établit une bijection entre $\partial \mathrm{F}_2$ et $[\![1,4]\!] \times [\![1,3]\!]^{\mathbb{N}^\star}$ dont le cardinal est celui de $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la dimension de } \operatorname{Ker} \Delta \text{ est infinie non dénombrable.}}$$

IX. Marche au hasard et vitesse de fuite

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi uniforme d'image Z.

On définit, pour tout entier naturel n, la variable aléatoire suivante, à valeurs dans F_2 :

$$X_n = Y_1 \cdots Y_n.$$

La variable aléatoire X_0 est ainsi certaine de valeur 1.

42. Soit φ un élément de $\partial \mathrm{F}_2$.

Montrer que $\dfrac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,3/4)$.

En déduire que, pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est voisin de X_{i-1}, donc $\varepsilon_i = b_\varphi(X_i) - b_\varphi(X_{i-1}) \in \{-1,1\}$.

On propose deux méthodes pour déterminer la loi de $\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$.

Méthode 1 (combinatoire).

En vertu des valeurs possibles des ε_i, on déduit que $b_\varphi(X_n)$ est à valeurs dans $\{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\} = 2[\![0,n]\!] - n$, donc que $\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Pour que $\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ vaille k, *i.e.* pour que $b_\varphi(X_n)$ vaille $2k-n$, il faut et suffit que $\operatorname{Card}\{i \in [\![1,n]\!] \mid \varepsilon_i = 1\} = k$.

Puisqu'à chaque étape, il y a un élément de Z qui diminue la valeur de b_φ et trois qui l'augmentent, alors il y a exactement $\binom{n}{k}3^k$ chemins partant de 1 qui réalisent l'évènement $\left(\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2} = k\right)$ (par choix des k indices i tels que $\varepsilon_i = 1$, puis, pour chaque i, du générateur utilisé) parmi les 4^n chemins possibles, ces derniers étant équiprobables puisque les variables aléatoires Y_i sont mutuellement indépendantes et uniformes. Ainsi,

$$\mathrm{P}\left(\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2} = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

et

$$\boxed{\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2} \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right).}$$

Méthode 2 (probabiliste).

Montrons que les variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque. Affirmer directement cette indépendance serait incorrect, puisque, pour $i \geqslant 1$, ε_i dépend de Y_i **et** de $X_{i-1} = Y_1 \cdots Y_{i-1}$, donc le lemme des coalitions ne s'applique pas.

Pour chaque $x \in \mathrm{F}_2$, on note $z^-(x)$ l'unique élément de Z tel que $b_\varphi(x\, z^-(x)) = b_\varphi(x) - 1$.
Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{-1, 1\}^n$.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$\forall (z_1, \dots, z_k) \in Z^k, \quad A(z_1, \dots, z_k) = \big(\forall i \in [\![1, k]\!], Y_i = z_i\big)$$

et

$$B_k = \left\{(z_1, \dots, z_k) \in Z^k \mid \forall i \in [\![1, k]\!], b_\varphi(z_1 \cdots z_i) - b_\varphi(z_1 \cdots z_{i-1}) = \alpha_i\right\}.$$

On a alors la partition

$$A_k = \big(\forall i \in [\![1, k]\!], \varepsilon_i = \alpha_i\big) = \bigsqcup_{(z_1, \dots, z_k) \in B_k} A(z_1, \dots, z_k).$$

(Remarquons qu'alors $B_0 = \{()\}$ et $A_0 = A() = \Omega$.)
Alors, pour $k \geqslant 1$, par la formule des probabilités totales, Y_k étant indépendante de A_{k-1} par indépendance mutuelle des Y_i,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{A_{k-1}}(\varepsilon_k = 1) && (2.30)\\
&= \sum_{(z_1, \dots, z_{k-1}) \in B_{k-1}} \mathrm{P}_{A_{k-1}}\big(A(z_1, \dots, z_{k-1})\big) \cdot \mathrm{P}_{A_{k-1}}\big(\varepsilon_k = 1 \mid A(z_1, \dots, z_{k-1})\big) && (2.31)\\
&= \sum_{(z_1, \dots, z_{k-1}) \in B_{k-1}} \mathrm{P}_{A_{k-1}}\big(A(z_1, \dots, z_{k-1})\big) \cdot \mathrm{P}\big(Y_k \neq z^-(z_1 \cdots z_{k-1})\big) && (2.32)\\
&= \left(\sum_{(z_1, \dots, z_{k-1}) \in B_{k-1}} \mathrm{P}_{A_{k-1}}\big(A(z_1, \dots, z_{k-1})\big)\right) \cdot \frac{3}{4} && (2.33)\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

et, de manière analogue,

$$\mathrm{P}(\varepsilon_k = 1) = \sum_{(z_1, \dots, z_{k-1}) \in Z^{k-1}} \mathrm{P}\big(A(z_1, \dots, z_{k-1})\big) \cdot \mathrm{P}\big(Y_k \neq z^-(z_1 \cdots z_{k-1})\big) = \frac{3}{4},$$

donc, comme ε_k ne prend que les deux valeurs -1 et 1,

$$\mathrm{P}_{A_{k-1}}(\varepsilon_k = \alpha_k) = \mathrm{P}(\varepsilon_k = \alpha_k).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\mathrm{P}\big(\forall i \in [\![1, n]\!], \varepsilon_i = \alpha_i\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\varepsilon_i = \alpha_i).$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

Il en va de même pour les variables aléatoires $\frac{\varepsilon_1+1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n+1}{2}$, qui forment donc une suite finie de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre $\frac{3}{4}$, donc leur somme vérifie

$$\boxed{\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2} \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right).}$$

On montre alors l'inégalité demandée.
Soit $\varepsilon > 0$.
En appliquant l'inégalité de Hoeffding vue dans l'introduction à $\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)} = \mathrm{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2n} - \frac{3}{4}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \boxed{\leqslant} \boxed{2e^{-2n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = 2e^{-n\varepsilon^2/2}.}$$

---

43. Montrer que, presque sûrement,

$$\frac{\mathrm{d}(1, X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Soit $\varphi \in \partial \mathrm{F}_2$ fixé.
Montrons d'abord la propriété voulue en remplaçant la fonction $\mathrm{d}(1, \cdot)$ par b_φ.
Soit $\varepsilon > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'évènement

$$A_n = \left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right),$$

qui vérifie, par la question précédente, $\mathrm{P}(A_n) \leqslant 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.
Ainsi, $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge, donc, par le lemme de Borel-Cantelli, l'évènement

B_ε : « Seulement un nombre fini de A_n sont réalisés. »

est de probabilité 1.
Remarquons que

$$B_\varepsilon = \left(\exists N \in \mathbb{N}^\star, \forall n \geqslant N, \left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

On pose alors

$$B = \bigcap_{\varepsilon>0} B_\varepsilon = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^\star} B_{\frac{1}{p}},$$

qui vérifie, par limite décroissante, $\mathrm{P}(B) = 1$.
Or,

$$B = \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^\star, \forall n \geqslant N, \left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon\right) = \left(\frac{b_\varphi(X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\right),$$

donc, presque sûrement

$$\boxed{\frac{b_\varphi(X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$$

Soit maintenant $\omega \in B$.
Comme $b_\varphi\big(X_n(\omega)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, alors $b_\varphi\big(X_n(\omega)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant K$, $b_\varphi\big(X_n(\omega)\big) \geqslant 1$.
On a alors, pour tout $n \geqslant K$,

$$m\big(X_n(\omega), \varphi\big) = m\big(X_K(\omega), \varphi\big),$$

qu'on note simplement m. En effet, si l'on avait $m\big(X_{n+1}(\omega),\varphi\big) \neq m\big(X_n(\omega),\varphi\big)$ pour un $n \geqslant K$, l'un de ces deux sommets voisins serait de la forme $\varphi_{\to j}$ et vérifierait donc $b_\varphi \leqslant 0$, ce qui est exclu.
Alors

$$\frac{\mathrm{d}\big(1,X_n(\omega)\big)}{n} = \frac{b_\varphi\big(X_n(\omega)\big)}{n} + \frac{2m}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Comme $\mathrm{P}(B) = 1$, alors, presque sûrement,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(1,X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$$

---

44. Montrer que, pour toute partie finie E de F_2,

$$\mathrm{P}\big(\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, X_n \notin E\big) = 1.$$

Soit E une partie finie de F_2.
Par la limite précédente, presque sûrement, $\mathrm{d}(1,X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\boxed{\text{presque sûrement, } X_n \notin E \text{ à partir d'un certain temps.}}$$

X. Compactification

On note $\overline{\mathrm{F}_2} = \mathrm{F}_2 \cup \partial\mathrm{F}_2$.

Par unicité de l'écriture réduite des éléments de F_2, on peut identifier un élément x de F_2 et l'unique suite finie d'éléments de Z sans simplifications $(x_1,\dots,x_k)$ telle que $x = x_1\cdots x_k$.

Pour unifier l'écriture des éléments de $\overline{\mathrm{F}_2}$, on prolonge ces suites finies par une infinité de 1 en écrivant $x = (x_1,\dots,x_k,1,1,\dots)$. Ainsi, tout élément y de $\overline{\mathrm{F}_2}$ est uniquement représenté par une suite infinie qu'on note $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

On étend naturellement la notation $y_{\to p}$ déjà employée précédemment.

On étend aussi l'action de translation à gauche de F_2 sur lui-même en une action de F_2 sur $\overline{\mathrm{F}_2}$: pour $x = x_1\cdots x_k$ dans F_2 et y dans $\overline{\mathrm{F}_2}$, $x\cdot y$ est l'élément de $\overline{\mathrm{F}_2}$ décrit par la suite infinie obtenue en supprimant successivement toutes les simplifications de la concaténation $x_1\cdots x_k y_1 y_2\cdots$.

Pour un élément y de $\overline{\mathrm{F}_2}$ et un entier naturel p, on définit

$$C(y,p) = \big\{z \in \overline{\mathrm{F}_2} \mid z_{\to p} = y_{\to p}\big\} \qquad \text{et} \qquad I(y,p) = C(y,p) \cap \partial\mathrm{F}_2.$$

Pour x et y appartenant à $\overline{\mathrm{F}_2}$, on définit

$$\mathrm{d}'(x,y) = \exp\big(-\max\{p \in \mathbb{N} \mid x_{\to p} = y_{\to p}\}\big).$$

45. Montrer que

$$\forall x, y, z \in \overline{\mathrm{F}_2}, \quad \mathrm{d}'(x,z) \leqslant \max\big(\mathrm{d}'(x,y), \mathrm{d}'(y,z)\big).$$

En déduire que d' est une distance sur $\overline{\mathrm{F}_2}$.
Montrer que sa restriction à $\mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2$ est topologiquement équivalente à d.
Décrire les boules ouvertes et les boules fermées, pour la distance d', à l'aide des $C(y,p)$ ci-dessus et en déduire que ces ensembles sont à la fois ouverts et fermés.

Remarquons, que la définition de d' est incorrecte lorsque $x = y$, auquel cas le maximum n'existe pas. Il faut alors poser $\mathrm{d}'(x,y) = 0$.

On conviendra de poser $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, muni de l'ordre évident, $x_{\to+\infty} = x$ pour $x \in \overline{\mathrm{F}_2}$, puis

$$K_{x,y} = \max\left\{p \in \overline{\mathbb{N}} \mid x_{\to p} = y_{\to p}\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}'(x,y) = \exp\big(-K_{x,y}\big)$$

pour $x, y \in \overline{\mathrm{F}_2}$, en prolongeant exp en $-\infty$ par $\exp(-\infty) = 0$.

Soient $x, y, z \in \overline{\mathrm{F}_2}$.
En notant $K = \min(K_{x,y}, K_{y,z})$, on a $x_{\to K} = y_{\to K} = z_{\to K}$, donc $K_{x,z} \geqslant K$, donc

$$\exp(-K_{x,z}) \leqslant \exp(-K) = \max\left(\exp(-K_{x,y}), \exp(-K_{y,z})\right),$$

i.e.

$$\boxed{\mathrm{d}'(x,z) \leqslant \max\left\{\mathrm{d}'(x,y), \mathrm{d}'(y,z)\right\}.}$$

L'application $\mathrm{d}' : \overline{\mathrm{F}_2} \times \overline{\mathrm{F}_2} \to \mathbb{R}_+$ vérifie trivialement la séparation et la symétrie, puis l'inégalité triangulaire est conséquence de l'*inégalité ultramétrique* ci-dessus, donc

$$\boxed{\mathrm{d}' \text{ est une distance sur } \overline{\mathrm{F}_2}.}$$

Pour $x \in \overline{\mathrm{F}_2}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note $B'_o(x,r)$ (resp. $B'_f(x,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r pour la distance d'.
Pour tout $x \in \mathrm{F}_2$, $\{x\} = B'_o\left(x, \mathrm{e}^{-\mathrm{d}(1,x)}\right)$ est un ouvert pour $\mathrm{d}'|_{\mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2}$, donc toute partie de F_2 est ouverte pour cette distance.
Comme elles ont les mêmes ouverts,

$$\boxed{\mathrm{d} \text{ et } \mathrm{d}'|_{\mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2} \text{ sont topologiquement équivalentes.}}$$

Soit $x \in \overline{\mathrm{F}_2}$.
Pour $r \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\boxed{B'_o(x,r) = C\left(x, \max\left(0, 1 + \left\lfloor \ln \frac{1}{r} \right\rfloor\right)\right) \qquad \text{et} \qquad B'_f(x,r) = C\left(x, \max\left(0, \left\lceil \ln \frac{1}{r} \right\rceil\right)\right),}$$

(le maximum avec 0 ne sert que pour r grand, auquel cas la boule est $C(x,0) = \overline{\mathrm{F}_2}$),
donc, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$C(x,p) = B'_o\left(x, \mathrm{e}^{1-p}\right) = B'_f\left(x, \mathrm{e}^{-p}\right)$$

et

$$\boxed{C(x,p) \text{ est à la fois ouvert et fermé.}}$$

46. Montrer que $\overline{\mathrm{F}_2}$ est un compact dont F_2 est une partie dense.

Comme $\overline{\mathrm{F}_2}$ est un espace métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité.

Soit $u \in \overline{\mathrm{F}_2}^{\mathbb{N}}$. On distingue deux cas.

- si une valeur est prise une infinité de fois par u (c'est en particulier le cas si $u(\mathbb{N})$ est finie), on peut extraire de u une suite constante, donc convergente ;
- si chaque valeur est prise un nombre fini de fois, on mime la dichotomie classique qui prouve le théorème de Bolzano-Weierstra dans $\mathbb{R}$.

  Pour $p \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathrm{F}_2$ d'écriture réduite de longueur p, l'ensemble $C(y,p) \setminus \{y\}$ est la réunion finie des ensembles $C(yz, p+1)$, pour $z \in Z$ ne simplifiant pas avec y.

  Comme u prend une infinité de valeurs distinctes dans $C(1,0) = \overline{\mathrm{F}_2}$, elle en prend une infinité dans $\overline{\mathrm{F}_2} \setminus \{1\}$, donc il existe $x_1 \in Z$ tel que u prenne une infinité de valeurs distinctes dans $C(x_1, 1)$. Puis, pour la même raison, il existe $x_2 \in Z \setminus \left\{x_1^{-1}\right\}$ tel que u prenne une infinité de valeurs distinctes dans $C(x_1x_2, 2)$, *etc.*

  On construit ainsi un élément $x = x_1x_2\cdots$ de $\partial\mathrm{F}_2$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, u prenne une infinité de valeurs distinctes dans $C(x_{\to p}, p) = C(x,p)$, de sorte que

  $$I_p = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in C(x,p)\}$$

  soit infini.

  On pose alors $n_0 = 0$, puis, par récurrence, pour chaque $p \geqslant 1$,

  $$n_p = \min\left(I_p \setminus [\![0, n_{p-1}]\!]\right)$$

  On construit ainsi une suite $(u_{n_p})_p$ extraite de u telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

  $$u_{n_p} \in C(x,p) = B'_f\left(x, \mathrm{e}^{-p}\right).$$

  Ainsi, (u_{n_p}) converge vers x.

Dans les deux cas, on a extrait de u une suite convergente.

Ainsi,

$$\boxed{\overline{\mathrm{F}_2} \text{ est compact.}}$$

De plus, pour tout $x \in \partial\mathrm{F}_2$, $x_{\to p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc

$$\boxed{\mathrm{F}_2 \text{ est dense dans } \overline{\mathrm{F}_2}.}$$

47. Montrer que $\partial\mathrm{F}_2$ est compact.

Montrer qu'il est *sans point isolé* : aucun singleton n'est ouvert.

Montrer qu'il est *totalement discontinu* : ses composantes connexes sont les singletons.

La preuve du second cas de la question précédente fonctionne encore pour extraire de toute suite d'éléments de $\partial\mathrm{F}_2$ une suite convergeant vers un élément de $\partial\mathrm{F}_2$, donc

$$\boxed{\partial\mathrm{F}_2 \text{ est compact.}}$$

Soit $x \in \partial \mathrm{F}_2$. D'après la question **45**, les boules ouvertes non vides centrées en x pour $\mathrm{d}'|_{\partial \mathrm{F}_2}$ sont les $I(x,p)$, avec $p \in \mathbb{N}$, qui sont des ensembles infinis, donc $\{x\}$ n'est pas ouvert. Ainsi,

$\boxed{\partial \mathrm{F}_2 \text{ est sans point isolé.}}$

Soit A une composante connexe de $\partial \mathrm{F}_2$. Elle est non vide par définition. Montrons que c'est un singleton par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x, y \in A$ différents. Alors $K = K_{x,y} \in \mathbb{N}$ et $y \notin C(x, K+1)$. Comme $C(x,K+1) \cap A$ est la trace sur A d'un ouvert-fermé, par la question **45**, c'est un ouvert-fermé de A. De plus, il n'est ni $\emptyset$, ni A, ce qui contredit la connexité de A.
Ainsi,

$\boxed{\partial \mathrm{F}_2 \text{ est totalement discontinu.}}$

XI. Sortie de la marche au hasard

48. Démontrer que, presque sûrement, il existe un élément du bord X_∞ tel que

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_\infty.$$

On définit Ω' comme l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$\mathrm{d}\big(1, X_n(\omega)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par la question **43**, on sait que

$\boxed{\Omega' \text{ est presque certain.}}$

Soit $\omega \in \Omega'$.
Montrons que la suite $\big(X_n(\omega)\big)_n$ est une suite de Cauchy pour d'.
Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^{-K} \leqslant \varepsilon$. Par définition de Ω', il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\mathrm{d}\big(1, X_n(\omega)\big) \geqslant K$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $X_n(\omega) \in C\big(X_N(\omega), K\big)$, puisque la seule arête qui permet de sortir de cet ensemble approcherait la marche à distance $K-1$ de 1 pour la distance d.
Pour tous n, p tels que $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, comme $X_n(\omega)$ et $X_p(\omega)$ sont dans $C\big(X_N(\omega), K\big) = B'_f\big(X_N(\omega), \mathrm{e}^{-K}\big)$ et que d' est ultramétrique,

$$\mathrm{d}'\big(X_n(\omega), X_p(\omega)\big) \leqslant \mathrm{e}^{-K} \leqslant \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \geqslant N, \quad \mathrm{d}'\big(X_n(\omega), X_p(\omega)\big) \leqslant \varepsilon,$$

i.e. $\big(X_n(\omega)\big)_n$ est une suite de Cauchy pour d'.
Comme $(\overline{\mathrm{F}_2}, \mathrm{d}')$ est un espace métrique compact, il est complet, donc

$$\boxed{\text{la suite } \big(X_n(\omega)\big)_n \text{ converge dans } \overline{\mathrm{F}_2}.}$$

Notons $X_\infty(\omega)$ sa limite et montrons qu'elle est dans $\partial\mathrm{F}_2$ par l'absurde.
Supposons que $X_\infty(\omega) \in \mathrm{F}_2$. Alors, $\{X_\infty(\omega)\}$ étant ouvert pour d′, la suite serait stationnaire, ce qui est impossible par définition de la marche au hasard.
Ainsi,

$$\boxed{X_\infty(\omega) \in \partial\mathrm{F}_2.}$$

On **admet** les faits intuitifs suivants :

- l'application X_∞ est une variable aléatoire (lorsqu'on munit $\partial\mathrm{F}_2$ de la tribu borélienne). On appelle *mesure harmonique basée en* 1 sa loi $\mu_1 = \mathrm{P}_{X_\infty}$, qui est donc une probabilité sur $\partial\mathrm{F}_2$: c'est la *loi de sortie* de la marche au hasard ;
- en lançant la marche au hasard à partir d'un point x de F_2 autre que 1, autrement dit en considérant les variables aléatoires $xY_1 \cdots Y_n$, on obtient des résultats analogues : presque sûrement, la marche tend vers un point du bord et sa loi de sortie est μ_x, *mesure harmonique basée en* x ;
- pour des raisons de symétrie, si l'on fixe un élément x de F_2 et un entier naturel p, la probabilité $\mu_x\big(x \cdot I(\varphi, p)\big)$ ne dépend pas de l'élément φ de $\partial\mathrm{F}_2$.

49. Soit (x, φ, p) un élément de $\mathrm{F}_2 \times \partial\mathrm{F}_2 \times \mathbb{N}$.
Calculer $\mu_x\big(x \cdot I(\varphi, p)\big)$ et vérifier que ce nombre ne dépend pas de x.
Montrer que, pour tout élément x de F_2 et tout borélien B de $\partial\mathrm{F}_2$,

$$\mu_x(B) = \int_B p_\varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(\varphi).$$

(On rappelle que les fonctions p_φ ont été définies à la question **40**.)

Pour $p \in \mathbb{N}$, notons encore S_p la sphère de centre 1 et de rayon p pour la distance d.
Comme toute écriture réduite de longueur p est prolongeable (et même d'une infinité de manières) en un élément de $\partial\mathrm{F}_2$, les probabilités $\mu_x\big(x \cdot I(y, p)\big)$, pour $y \in S_p$, sont toutes identiques et valent donc $\frac{1}{\operatorname{Card} S_p}$, puisque les ensembles $x \cdot I(y, p)$, pour $y \in S_p$, sont incompatibles et de réunion certaine.
À l'aide de la formule trouvée pendant la résolution de la question **37**, on obtient

$$\boxed{\mu_x\big(x \cdot I(\varphi, p)\big)} = \mu_x\big(x \cdot I(\varphi_{\to p}, p)\big) = \frac{1}{\operatorname{Card} S_p} \boxed{= \frac{1}{4 \cdot 3^{p-1}}.}$$

pour $p \geqslant 1$; pour $p = 0$, on a $x \cdot I(\varphi, 0) = \partial\mathrm{F}_2$ et cette probabilité vaut 1.
Cette probabilité est indépendante de x.

Fixons maintenant un $x \in \mathrm{F}_2$ et montrons l'égalité voulue pour tout borélien B de $\partial\mathrm{F}_2$.
Remarque. Les justifications suivantes ne sont « pas vraiment » attendues :

- l'intégrale de l'énoncé est bien définie car la fonction $\varphi \longmapsto p_\varphi(x)$ est continue puisque localement constante ;
- une mesure borélienne sur un espace métrique compact est régulière, donc il suffit de vérifier l'égalité lorsque B est ouvert. Il s'écrit alors comme réunion disjointe de boules ouvertes (forcément dénombrable par la question **45**), obtenues comme classes de la relation « être dans une même boule ouverte incluse dans B », qui est une relation d'équivalence puisque, par ultramétricité, deux boules ouvertes sont disjointes ou vérifient une inclusion de l'une dans l'autre.

Pour avoir l'égalité demandée, il suffit ainsi de la montrer pour les ensembles $I(\psi,p)$. Il suffit même de la montrer pour $p \geqslant 1$: le cas $p=0$ s'en déduit par additivité, puisque $\partial \mathrm{F}_2$ est la réunion disjointe des $I(z,1)$, pour $z \in Z$.
Soit $(\psi,p) \in \partial \mathrm{F}_2 \times \mathbb{N}^\star$.
Remarquons que l'ensemble $I(\psi,p)$ s'écrit comme réunion disjointe ainsi :

$$I(\psi,p) = I(\psi_{\to p},p) = \bigsqcup_{z \in Z \setminus \{\psi_p^{-1}\}} I(\psi_{\to p}\, z, p+1).$$

En itérant cela, pour tout $q > p$, on peut écrire $I(\psi,p)$ comme réunion disjointe finie d'ensembles de la forme $I(\varphi,q)$.
Comme les membres de l'égalité à montrer vérifient la propriété d'additivité disjointe par rapport à l'ensemble mesuré, on peut donc supposer, quitte à décomposer $I(\psi,p)$ comme ci-dessus, que $x \notin C(\psi,p)$.
Dans ce cas, d'une part, comme $x \notin C(\psi,p)$,

$$I(\psi,p) = x \cdot I\big(x^{-1} \cdot \psi, p + b_\psi(x)\big),$$

donc

$$\mu_x\big(I(\psi,p)\big) = \frac{1}{4 \cdot 3^{p+b_\psi(x)-1}}$$

et, d'autre part, pour tout $\varphi \in I(\psi,p)$, encore car $x \notin C(\psi,p)$, on a $b_\varphi(x) = b_\psi(x)$, donc $p_\varphi(x) = 3^{-b_\varphi(x)} = 3^{-b_\psi(x)}$ et

$$\int_{I(\psi,p)} p_\varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(\varphi) = 3^{-b_\psi(x)} \mu_1\big(I(\psi,p)\big) = \frac{3^{-b_\psi(x)}}{4 \cdot 3^{p-1}},$$

donc

$$\boxed{\mu_x\big(I(\psi,p)\big) = \int_{I(\psi,p)} p_\varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(\varphi),}$$

ce qui conclut.

XII. Problème de Dirichlet

Soit g une fonction continue sur $\partial \mathrm{F}_2$.

50. Montrer qu'il existe une unique fonction f définie sur $\overline{\mathrm{F}_2}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- la fonction f est continue ;
- la restriction de f à F_2 est harmonique ;
- la restriction de f à $\partial \mathrm{F}_2$ égale g.

On pourra commencer par montrer que la fonction

$$h : \begin{cases} \mathrm{F}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\partial \mathrm{F}_2} g(\varphi)\, \mathrm{d}\mu_x(\varphi) \end{cases}$$

est harmonique.

Soit $x \in \mathrm{F}_2$.
Par la question précédente, les deux mesures positives μ_x et $p_\cdot(x)\mu_1$ sont égales, puisqu'elles coïncident sur les boréliens de $\partial \mathrm{F}_2$. Les intégrales qu'elles définissent étant égales,

$$h(x) = \int_{\partial \mathrm{F}_2} g(\varphi)\, \mathrm{d}\mu_x(\varphi) = \int_{\partial \mathrm{F}_2} g(\varphi)\, p_\varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(\varphi).$$

Alors, par linéarité de l'intégrale, la somme intervenant dans le laplacien étant finie, pour tout $x \in \mathrm{F}_2$,

$$(\Delta h)(x) = \int_{\partial \mathrm{F}_2} g(\varphi)\,(\Delta p_\varphi)(x)\,\mathrm{d}\mu_1(\varphi) = 0,$$

donc

$$\boxed{h \text{ est harmonique.}}$$

Soit $\psi \in \partial \mathrm{F}_2$. Montrons que $h(x) \underset{x\to\psi}{\longrightarrow} g(\psi)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme g est continue en ψ, il existe un voisinage de ψ, $V = I(\psi, p)$, tel que $p \geqslant 1$ et, pour tout $\varphi \in V$, $|g(\varphi) - g(\psi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in \mathrm{F}_2 \cap C(\psi, p)$.

On note $q(x) = \mathrm{d}(\psi_{\to p}, x)$ et on remarque que

$$\partial \mathrm{F}_2 \setminus V = x \cdot I(x^{-1} \cdot \psi_{\to(p-1)}, q(x) + 1),$$

ce qui donne

$$\mu_x(\partial \mathrm{F}_2 \setminus V) = \frac{1}{4 \cdot 3^{q(x)}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|h(x) - g(\psi)| &= \left| \int_{\partial \mathrm{F}_2} \big(g(\varphi) - g(\psi)\big)\,\mathrm{d}\mu_x(\varphi) \right| && (2.34)\\
&\leqslant \int_{\partial \mathrm{F}_2} |g(\varphi) - g(\psi)|\,\mathrm{d}\mu_x(\varphi) && (2.35)\\
&= \int_V |g(\varphi) - g(\psi)|\,\mathrm{d}\mu_x(\varphi) + \int_{\partial \mathrm{F}_2 \setminus V} |g(\varphi) - g(\psi)|\,\mathrm{d}\mu_x(\varphi) && (2.36)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|g\|_\infty}{2 \cdot 3^{q(x)}}.
\end{aligned}$$

De plus, lorsque x tend vers ψ, $q(x)$ tend vers $+\infty$, donc il existe un voisinage W de ψ dans $\overline{\mathrm{F}_2}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{F}_2 \cap W$, $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon \cdot 3^{q(x)}$.

Pour $x \in \mathrm{F}_2$ dans le voisinage $W \cap C(\psi, p)$ de ψ, on a alors $|h(x) - g(\psi)| \leqslant \varepsilon$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall \psi \in \partial \mathrm{F}_2, \quad h(x) \underset{x\to\psi}{\longrightarrow} g(\psi)}$$

donc, puisque h est continue sur F_2 d'après la question **11** et g est continue sur $\partial \mathrm{F}_2$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie par } f|_{\mathrm{F}_2} = h \text{ et } f|_{\partial \mathrm{F}_2} = g \text{ est continue sur } \overline{\mathrm{F}_2}}$$

et, bien sûr,

$$\boxed{f|_{\mathrm{F}_2} \text{ est harmonique.}}$$

Reste à prouver l'unicité. Soient deux fonctions convenant. Alors, leur différence η est continue sur $\overline{\mathrm{F}_2}$, nulle sur $\partial \mathrm{F}_2$ et harmonique sur F_2.

Montrons par l'absurde que $\eta = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, η admet un maximum et un minimum par continuité sur un compact et, l'un des deux étant non nul, on peut supposer que c'est

le maximum, quitte à changer η en $-\eta$. Ce maximum $\alpha > 0$ est atteint en un point $x \in \mathrm{F}_2$, puis, par harmonicité de η, η vaut α sur la sphère $S(x,1)$, puis sur $S(x,2)$, *etc.* Par connexité de F_2 et récurrence rapide, $\eta|_{\mathrm{F}_2} \equiv \alpha$, puis, par continuité de η sur $\overline{\mathrm{F}_2}$ et densité de F_2 dans $\overline{\mathrm{F}_2}$, $\eta \equiv \alpha$, ce qui contredit le fait qu'elle est nulle au bord.

Ainsi, $\eta = 0$, ce qui prouve l'$\boxed{\text{unicité de } f.}$

2.2 Épreuve d'analyse et probabilités

2.2.1 Présentation du sujet

Le problème porte sur les représentations de nombres réels par des sommes d'inverses d'entiers, puis d'inverses de puissances d'entiers distincts. Il conduit à un théorème de Paul Lévy relatif aux développements en série de Sylvester et à un théorème de Ronald Graham caractérisant les rationnels qui admettent une représentation finie de cette dernière forme.

La partie **I** présente les développements en base entière et les développements en série de Sylvester. La partie **II** étudie une famille de fonctions définies par des séries ainsi qu'une suite définie implicitement ; elle fait également intervenir la transformation de Fourier et l'analyse complexe. La partie **III** est consacrée aux déterminations du logarithme. La partie **IV** étudie les ensembles de sommes obtenues en sélectionnant certains termes d'une série convergente à termes positifs. Les parties **V** et **VI** établissent respectivement les théorèmes de Paul Lévy et de Ronald Graham.

Les trois premières parties pouvaient être abordées de manière autonome. Le sujet permettait de mobiliser des connaissances variées : suites et séries numériques, séries de fonctions, intégration, analyse complexe, probabilités et arithmétique. Un traitement rigoureux de la partie **I**, de la première moitié de la partie **II** et de plusieurs questions de la partie **III** permettait d'obtenir une bonne note. Les tentatives de grappillage de questions isolées dans la partie **IV** se sont révélées peu fructueuses. La recherche de questions apparemment immédiates ne doit pas se faire au détriment d'un traitement approfondi des parties engagées.

2.2.2 Remarques générales

Le jury attache une importance particulière à la précision et à la cohérence des raisonnements. Les opérations portant sur des sommes infinies, les intégrations terme à terme et les passages à la limite demandent des justifications explicites. La seule mention d'un théorème ne suffit pas lorsque ses hypothèses n'ont pas été vérifiées.

Une rédaction satisfaisante distingue les paramètres fixés des variables, précise les quantificateurs et indique les résultats utilisés. Lorsqu'une question antérieure est citée, son domaine de validité doit être respecté. Ces exigences sont compatibles avec la concision : il s'agit de justifier chaque étape du raisonnement avec précision, sans développements superflus.

Dans les premières questions, notamment celles portant sur les parties entières, certaines copies ont enchaîné des égalités, des inégalités ou des implications manifestement fausses pour parvenir au résultat annoncé. Retrouver la conclusion attendue au prix d'un raisonnement incorrect ne saurait être valorisé. Le jury attend des candidats une réelle honnêteté intellectuelle : mieux vaut reconnaître qu'une démonstration reste incomplète que chercher à en masquer les lacunes.

2.2.3 Commentaires sur certaines questions

Les remarques qui suivent précisent les principales difficultés relevées et les justifications attendues. Elles complètent le corrigé proposé.

— **Convergence et calcul d'une somme.** Aux questions **7**.(b) et **8**.(c), de nombreuses copies ont manipulé les sommes des séries $\sum 1/s_n$ et $\sum 1/q_n$ sans en établir préalablement la convergence. Le recours aux sommes partielles permettait de justifier simultanément la convergence et la valeur de la somme.

— **Convergence locale et continuité.** À la question **12**.(a), la convergence normale sur chaque segment $[0, A]$, obtenue par la majoration du terme général par A^p/n^p, suffisait à établir la continuité de T_p. En revanche, la série ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$: la norme infinie de chaque terme sur cet intervalle vaut 1, de sorte que le terme général ne tend pas uniformément vers 0. Une autre démarche consistait à factoriser x^p et à étudier la série de terme général $(x+n)^{-p}$.

— **Monotonie d'une somme de série.** À la question **12**.(b), les sommes partielles étant croissantes sur $[0, +\infty[$, leur limite simple T_p l'est également. Il était donc inutile de dériver la série terme à terme pour déterminer le sens de variation de T_p. La stricte croissance, qui permet d'établir l'unicité de t_p à la question **13**.(a), se justifie en isolant le premier terme de la série : celui-ci est strictement croissant tandis que la somme des termes restants est croissante.

— **Choix d'un théorème de passage à la limite.** À la question **12**.(c), plusieurs copies ont fait appel au théorème de la double limite sous sa forme usuelle, relative à des limites finies. La divergence de la série des limites excluait son application. Une minoration par une somme partielle permettait de conclure aisément.

— **Comparaison série-intégrale.** Cette technique classique a été trop peu utilisée à la question **12**.(d). Sa mise en œuvre exige de préciser la monotonie de la fonction considérée et de respecter le sens des inégalités. Le caractère strict des inégalités demandées doit également être justifié.

— **Hypothèses du théorème de la double limite.** Contrairement à la question **12**.(c), le théorème de la double limite était adapté à la question **16**.(b). Plusieurs copies se sont toutefois appuyées sur la seule convergence uniforme de la série, sans vérifier que chaque fonction g_n admet une limite finie en $+\infty$.

— **Paramètre fixé et paramètre variable.** À la question **17**, de nombreuses copies ont appliqué le résultat de la question **16**.(b) avec $x = t_p/p$. Or ce résultat est établi pour $x > 0$ fixé. La substitution d'une quantité dépendant de p à ce paramètre n'est donc pas justifiée par la convergence obtenue. Un encadrement fondé sur la monotonie de T_p permettait de conclure.

— **Uniformité d'une majoration sur un compact.** À la question **18**, un équivalent ou une estimation en $O(n^{-p})$ pour chaque z fixé ne suffit pas à justifier l'holomorphie de la somme. La majoration utilisée pour établir la convergence normale sur un compact K doit être uniforme en $z \in K$. Pour $R > 0$ tel que $|z| \leqslant R$ sur K, la borne $|z/(z+n)|^p \leqslant (2R/n)^p$, valable pour $n > 2R$, convient. Les termes restants, en nombre fini, sont holomorphes sur le domaine.

— **Quantification et connexité.** À la question **21**, il s'agit d'établir que les deux déterminations du logarithme diffèrent d'une constante appartenant à $2i\pi\mathbb{Z}$. Certaines copies se sont limitées à une relation ponctuelle exprimée sous forme de congruence, sans justifier que l'entier introduit est indépendant de z. L'existence d'un même entier pour tout z constitue précisément le point à établir (la continuité et la connexité du domaine permettent de conclure).

Les parties **IV** à **VI**, abordées seulement dans un très petit nombre de copies, ne font pas l'objet de commentaires détaillés.

2.2.4 Corrigé

Éléments de correction du sujet AP

Partie I : Développement p-adique et développement en série de Sylvester

1.(a) **Inégalités souhaitées.** — On a : $\lfloor p^n x\rfloor \leqslant p^n x < \lfloor p^n x\rfloor + 1$ et donc $u_n \leqslant x < v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.(b) $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ **sont adjacentes.** — On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p\lfloor p^n x\rfloor \leqslant p^{n+1}x < p\lfloor p^n x\rfloor + p$ et par définition de la partie entière, il vient : $p\lfloor p^n x\rfloor \leqslant \lfloor p^{n+1}x\rfloor \leqslant p^{n+1}x < \lfloor p^{n+1}x\rfloor + 1 \leqslant p\lfloor p^n x\rfloor + p$, puis en divisant par p^{n+1}, il vient : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant x < v_{n+1} \leqslant v_n$. Comme $v_n - u_n = \dfrac{1}{p^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit facilement la propriété demandée.

2 Inégalité $0 \leqslant b_n < p$. — L'inégalité ci-dessus donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$p\lfloor p^{n-1}x\rfloor \leqslant \lfloor p^n x\rfloor \leqslant p^n x < \lfloor p^n x\rfloor + 1 \leqslant p\lfloor p^{n-1}x\rfloor + p,$$

ce qui fournit, en retranchant $p\lfloor p^{n-1}x\rfloor$ à chaque membre : $0 \leqslant b_n < p$.

3 Identité demandée. — On peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\lfloor x\rfloor + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{p^k} = \lfloor x\rfloor + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor p^k x\rfloor - p\lfloor p^{k-1}x\rfloor}{p^k} = u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x,$$

d'où le résultat.

4 Résultat souhaité. — Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ devienne stationnaire à la valeur $p-1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(n \geqslant N) \Longrightarrow b_n = p-1$.
On en déduit que pour $n \geqslant N$, $\lfloor p^n x\rfloor - p\left\lfloor p^{n-1}x\right\rfloor = p-1$, ou encore : $v_n = v_{n-1}$. Alors la suite v finit par stationner à une valeur v_N. Un passage à la limite conduit à : $x = v_N$, ce qui contredit $x < v_N$. Le résultat en découle.

5 Unicité de la suite. — Considérons une suite $(c_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$, qui ne finit pas par stationner à la valeur $p-1$ et telle que : $x = \lfloor x\rfloor + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a les relations :

$$p^n x = \underbrace{p^n\lfloor x\rfloor + \sum_{k=1}^{n} c_k p^{n-k}}_{p_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k-n}} = p_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{p^k}}_{\varrho_n},$$

avec $p_n \in \mathbb{N}$ et : $0 \leqslant \varrho_n < \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^k} = 1$, l'inégalité stricte résultant du fait que la suite $(c_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ ne finit pas par stationner à la valeur $p-1$. Il en résulte que : $\lfloor p^n x\rfloor = p_n, (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.
Ainsi, on peut écrire : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*), b_n = \lfloor p^n x\rfloor - p\lfloor p^{n-1}x\rfloor = p_n - pp_{n-1} = c_n$, en convenant de poser $p_0 = \lfloor x\rfloor$, ce qui établit que : $(b_q)_{q\in\mathbb{N}^*} = (c_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ et le résultat.

6.(a) **Identité demandée.** — On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est vrai au rang $n = 0$, comme cela a été vu plus haut. Supposons le vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On a donc : $\dfrac{\theta_n}{b} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n+k}}{p^k}$ et $b_n = \left\lfloor \dfrac{\theta_n}{b} \right\rfloor$. On peut déjà écrire :

$$\frac{\theta_{n+1}}{b} = p\big(\theta_n/b - \lfloor \theta_n/b\rfloor\big) = p\big(\theta_n/b - b_n\big) = p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n+k}}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n+1+k}}{p^k}.$$

Il en résulte : $\dfrac{\theta_{n+1}}{b} = b_{n+1} + \tau$ où l'on a : $0 \leqslant \tau = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n+1+k}}{p^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^k} = 1$, l'inégalité stricte découlant du fait que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne finit pas par stationner à $p-1$, ce qui fournit : $b_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{\theta_{n+1}}{b} \right\rfloor$.
Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

6.(b) **Caractérisation des rationnels.** — Supposons que la suite $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par être périodique : il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $q \geqslant 1$ tels que : $b_{n+q} = b_n$, pour tout $n \geqslant N$. Voici deux démonstrations de la rationalité de x.
Preuve 1. La série étant absolument convergente, on en déduit que :

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{b_j}{p^j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{q-1} \frac{b_{N+kq+i}}{p^{N+kq+i}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{q-1} \frac{b_{N+i}}{p^{N+kq+i}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{p^{kq}} = \frac{Ap^q}{p^q-1},$$

où $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{q-1} \frac{b_{N+i}}{p^{N+i}}$. Il en découle que : $x = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \frac{b_j}{p^j} + \frac{Ap^q}{p^q-1}$, qui est bien un réel rationnel.
Preuve 2. Notons $r = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \frac{b_j}{p^j}$ et $A = \displaystyle\sum_{j=N}^{N+q-1} \frac{b_j}{p^j}$. Alors $x = r + A + \displaystyle\sum_{j=N+q}^{+\infty} \frac{b_{j-q}}{p^j} = r + A + \frac{1}{p^q} \sum_{j=N+q}^{+\infty} \frac{b_{j-q}}{p^{j-q}}$
donc $x = r + A + \dfrac{1}{p^q}(x-r)$ ce qui donne $x = r + A\dfrac{p^q}{p^q-1}$, qui est bien un réel rationnel.
Supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et introduisons la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédente. Elle constitue une suite récurrente, qui pour $n \geqslant 1$ est à valeurs entières dans $[\![0, p(b-1)]\!]$, donc elle prend un nombre fini de valeurs et finit par être périodique. On en déduit que la suite $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par être périodique.

7.(a) **Divergence de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** — La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s_{n+1} - s_n = (s_n-1)^2 \geqslant 0$, donc est croissante. Comme $s_1 = 2$, la suite est à valeurs $\geqslant 2 > 1$ et donc : $s_{n+1} - s_n \geqslant 1$, puis $s_n \geqslant n+1$ et donc : $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

7.(b) **Identité souhaitée.** — Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{s_k} = \frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1}-1}.$$

Ainsi, pour tous entiers $N \geqslant n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{s_k} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{N+1}-1}.$$

Comme $s_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, cette identité établit la convergence de la série et donne $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} 1/s_k = 1/(s_n-1)$.

8.(a) **Existence des suites.** — On a, pour tout $x > 0$: $1/x < \lfloor 1/x \rfloor + 1$, ce qui fournit l'inégalité : $x - \dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor + 1} > 0$. Une récurrence montre alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, à valeurs > 0 puis que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ également, à valeurs $\geqslant 1$.

8.(b) **Inégalités souhaitées.** — Considérons $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà : $q_n - 1 \leqslant 1/x_n < q_n$.
On en déduit que : $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n - 1/q_n} = \dfrac{1/x_n}{1 - 1/(q_n x_n)} \geqslant \dfrac{q_n - 1}{1 - (q_n-1)/q_n} = q_n(q_n-1)$.
On a de même : $\dfrac{1}{x_{n+1}} < q_{n+1}$, ce qui conduit à : $q_n(q_n-1) < q_{n+1}$, ou encore : $q_n(q_n-1) + 1 \leqslant q_{n+1}$,

ce qui constitue le résultat.

8.(c) **Identité souhaitée.** — La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante >0 donc est convergente.
On en déduit que : $\dfrac{1}{q_n} = x_n - x_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, puis que : $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On peut alors écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k+1}\right) = x_1 - x_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1 = x,$$

d'où le résultat annoncé.

9.(a) **Inégalité souhaitée.** — On peut déjà écrire que : $\dfrac{1}{r_n} < \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} = x \leqslant 1$, ce qui assure que $r_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut alors en déduire que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$r_{n+1} \geqslant r_n^2 - r_n + 1 \iff r_{n+1} - 1 \geqslant r_n^2 - r_n \iff \frac{1}{r_{n+1}-1} \leqslant \frac{1}{r_n^2 - r_n} = \frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_n},$$

soit : $\dfrac{1}{r_n} \leqslant \dfrac{1}{r_n - 1} - \dfrac{1}{r_{n+1} - 1}$, ce qui constitue le résultat.

9.(b) **Relation souhaitée.** — On peut écrire :

$$\frac{1}{r_1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} = x \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k - 1} - \frac{1}{r_{k+1} - 1}\right) = \frac{1}{r_1 - 1},$$

ce qui conduit à : $r_1 - 1 \leqslant \dfrac{1}{x} < r_1$, puis au résultat demandé.

10 Existence et unicité d'un tel développement. — L'existence d'une telle suite a été mise en évidence précédemment, à l'aide de la suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons l'unicité. Supposons que $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} \geqslant r_n^2 - r_n + 1$ et $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $q_n = r_n$.
On a déjà : $q_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$. Si $r_1 = 1$, on a clairement $x > 1$ et donc on a bien $r_1 = q_1$.
Sinon $r_1 > 1$ et donc une récurrence aisée permet de voir que : $r_k \geqslant s_k$, pour tout entier $k \geqslant 1$, puisque $x \mapsto x^2 - x + 1$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, ce qui conduit à : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} = 1$.
Ainsi, dans le cas $r_1 > 1$, on a : $0 < x \leqslant 1$ et $q_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1 = r_1$, d'après **9**.(b). On a donc établi que le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons : $r_k = q_k$, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$.
On a : $x' = x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k}$ est un réel > 0. On a alors de manière analogue : $r_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{1}{x'} \right\rfloor + 1$.
Par ailleurs, on a également : $x' = x_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = x_{n+1}$, d'où $r_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{1}{x_{n+1}} \right\rfloor + 1 = q_{n+1}$, d'où le résultat annoncé.

11.(a) $\boldsymbol{x \in \mathbb{Q}}$**.** — On sait qu'il existe $N' > N$ tel que, pour tout $k \geqslant N'$, on a : $r_k > 1$.
Ainsi, on peut écrire, pour tout $k \geqslant N'$: $\dfrac{1}{r_k} = \dfrac{1}{r_k - 1} - \dfrac{1}{r_{k+1} - 1}$. On en déduit :

$$x = \sum_{k=1}^{N'-1} \frac{1}{r_k} + \sum_{k=N'}^{\infty} \frac{1}{r_k} = \sum_{k=1}^{N'-1} \frac{1}{r_k} + \sum_{k=N'}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k - 1} - \frac{1}{r_{k+1} - 1}\right) = \sum_{k=1}^{N'-1} \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{N'} - 1},$$

qui est bien un réel rationnel.

11.(b) **Caractérisation des rationnels.** — Ce qui précède montre que la condition est suffisante. Supposons que : $x = \dfrac{c}{d}$, avec $(c,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors il existe un entier $\rho_n \geqslant 1$ tel que :

$$\frac{c}{d} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} = \frac{\rho_n}{d \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n} r_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k}.$$

Nous allons établir que la suite d'entiers $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
On a successivement, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\rho_{n+1} \leqslant \rho_n \iff r_{n+1} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{r_k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k} \iff r_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k} - 1 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k}$$
$$\iff (r_{n+1}-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k} \leqslant 1;$$

la dernière inégalité est vérifiée si $r_{n+1} = 1$, sinon elle découle du fait que :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k - 1} - \frac{1}{r_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{r_{n+1} - 1}.$$

Ainsi $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls. Elle finit donc par stationner, c'est-à-dire il existe un entier $N > 1$ tel que :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*),\ (n \geqslant N) \Longrightarrow \rho_n = \rho_{n-1} \Longrightarrow (r_n - 1) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1.$$

En choisissant N tel que $r_N > 1$, on peut alors écrire, pour tout $n \geqslant N$:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r_k} = \frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_{n+1} - 1} = \frac{1}{r_n},$$

ce qui conduit à : $r_{n+1} = r_n^2 - r_n + 1$, d'où le résultat annoncé.

Partie II : Estimations préliminaires

12.(a) **Premières propriétés de T_p.** — Pour tout $x \geqslant 0$, on a : $\left(\dfrac{x}{x+n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où l'on déduit que $T_p(x)$ est bien définie. Par ailleurs, on peut écrire sur $\mathbb{R}^+$: $T_p(x) = x^p h(x)$, avec : $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+n)^p}}_{h_n(x)}$. Chaque fonction h_n est continue et l'on a sur $\mathbb{R}^+$: $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^p},\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.
La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p}$ étant convergente, on en déduit la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n$.
Le théorème de continuité des séries de fonctions assure que h, et par suite T_p, est continue sur $\mathbb{R}^+$.

12.(b) **Variations de T_p.** — Soit $0 \leqslant x < y$. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{t}{t+n}\right)^p$ est

strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Tous les termes de la série donnant $T_p(y)-T_p(x)$ sont donc positifs et, en conservant le premier, on obtient :

$$T_p(y)-T_p(x)\geqslant\left(\frac{y}{y+1}\right)^p-\left(\frac{x}{x+1}\right)^p>0.$$

Ainsi, T_p est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

12.(c) **Limite de T_p en $+\infty$.** — Voici deux démonstrations de ce résultat.
Preuve 1. D'après la question précédente, T_p admet une limite finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Montrons que T_p n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$ en raisonnant par l'absurde : supposons l'existence de $M>0$ tel que : $(\forall\, x\geqslant 0), T_p(x)\leqslant M$. Pour tout entier naturel $q\geqslant 1$, on a : $(\forall\, x\geqslant 0)$, $M\geqslant T_p(x)\geqslant \sum_{n=1}^{q}\left(\frac{x}{x+n}\right)^p\xrightarrow[x\to+\infty]{} q$, ce qui conduit à $M\geqslant q$, pour tout entier $q\geqslant 1$ et donc une absurdité. Ainsi on a : $T_p(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Preuve 2. On a bien sûr pour tout entier $q\geqslant 1$: $T_p(k)\geqslant\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{k}{k+n}\right)^p\xrightarrow[k\to+\infty]{} q$ d'où $\liminf\limits_{k\to+\infty} T_p(k)\geqslant q$, et ce pour tout entier $q\geqslant 1$ et donc $T_p(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

12.(d) **Encadrement de T_p.** — Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto\frac{x^p}{(x+t)^p}$ est continue strictement décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$, ce qui fournit :

$$(\forall\, n\in\mathbb{N}^*),(\forall\, x>0),\quad \int_n^{n+1}\frac{x^p}{(x+t)^p}\,dt<\frac{x^p}{(x+n)^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{x^p}{(x+t)^p}\,dt,$$

ou encore, on a sur $]0,+\infty[$: $\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{(x+t)^p}\,dt<T_p(x)<\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{(x+t)^p}\,dt$, ou encore : $\frac{x^p}{(p-1)(x+1)^{p-1}}<T_p(x)<\frac{x}{p-1}$, ce qui constitue le résultat.

13.(a) **Existence de t_p.** — On a vu que T_p est continue strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $T_p(0)=0$ et $T_p(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, le résultat relève du théorème de la bijection, pour tout entier $p\geqslant 2$.

13.(b) **$p-1<t_p$.** — Les inégalités établies en **12** donnent : $1=T_p(t_p)<\frac{t_p}{p-1}$, ce qui fournit : $p-1<t_p$, pour tout $p\geqslant 2$.

13.(c) **$t_2<2$.** — On a : $T_2(2)>4/3>1=T_2(t_2)$ donc, par croissance de T_2, $2>t_2$.

13.(d) **Inégalité demandée.** — Fixons un entier $p\geqslant 2$. Par définition de t_p, l'entier $N=\lfloor t_p\rfloor$ vérifie : $T_p(N)\leqslant 1<T_p(N+1)$, ou encore : $\frac{1}{N^p}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(N+n)^p}$ et : $\frac{1}{(N+1)^p}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(N+1+n)^p}$.
On en déduit que :

$$\frac{1}{N^p}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(N+n)^p}=\frac{1}{(N+1)^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(N+1+n)^p}>\frac{2}{(N+1)^p},$$

ce qui conduit à : $\frac{1}{N}>\frac{2^{\frac{1}{p}}}{N+1}$, et donc à : $\lfloor t_p\rfloor=N<\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}-1}$, ce qui est le résultat.

14.(a) **Monotonie demandée.** — On a pour tout entier $p\geqslant 2$ et $n\geqslant 1$: $\frac{x^{p+1}}{(x+n)^{p+1}}<\frac{x^p}{(x+n)^p}$,

d'où après sommation, on a : $T_{p+1}(x) < T_p(x)$ et l'inégalité annoncée.

14.(b) **Monotonie de $(t_p)_{p\geqslant 2}$.** — On a pour tout $p \geqslant 2$: $T_{p+1}(t_p) < T_p(t_p) = 1 = T_{p+1}(t_{p+1})$ et donc $T_{p+1}(t_p) < T_{p+1}(t_{p+1})$, ce qui assure, par croissance de T_{p+1}, $t_p < t_{p+1}$ et le résultat.

15 Décroissance demandée. — On a déjà la relation : $\ln\left(\left(1+\dfrac{t}{p}\right)^{-p}\right) = -\varrho_1(1/p)$, où l'on a posé sur $]0,1]$ $\varrho_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+tx)}{x}$. La fonction $x \mapsto \ln(1+tx)$ est concave sur $]0,+\infty[$ et donc l'inégalité des trois pentes assure que ϱ_1 est décroissante sur $]0,+\infty[$ et que la suite proposée est décroissante.

16.(a) **Identité souhaitée.** — On a immédiatement :

$$T_p(xp) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{xp}{xp+n}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{n}{xp}\right)^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(p).$$

16.(b) **Limite demandée.** — L'étude de la suite menée en **15** assure que :

$$(\forall\, n \geqslant 1), (\forall\, p \geqslant 2),\ 0 \leqslant g_n(p) \leqslant g_n(2).$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n(2)$ converge, la série de fonctions proposée converge normalement sur l'intervalle entier $[\![2,+\infty[\![$. D'autre part, pour tout $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$: $g_n(p) = \left(1+\dfrac{n}{xp}\right)^{-p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(-n/x)$. Le théorème d'interversion des limites assure alors que

$$T_p(xp) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n/x) = \frac{\exp(-1/x)}{1-\exp(-1/x)} = \frac{1}{\exp(1/x)-1}.$$

17 Équivalent souhaité. — Considérons un réel $\varepsilon > 0$ assez petit. Ce qui précède fournit :

$$(\forall\, p \geqslant 2), \quad T_p\left(\frac{p}{(1+\varepsilon)\ln 2}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2^{1+\varepsilon}-1} < 1 = T_p(t_p).$$

Comme T_p est strictement croissante, on en déduit que pour p assez grand : $\dfrac{p}{(1+\varepsilon)\ln 2} < t_p$.

On montrerait de même que pour p assez grand : $t_p < \dfrac{p}{(1-\varepsilon)\ln 2}$.

On a donc, pour $p \geqslant 2$ assez grand : $1-\varepsilon < \dfrac{p}{t_p \ln 2} < 1+\varepsilon$ c'est-à-dire : $\dfrac{p}{t_p\ln 2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, soit $t_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p}{\ln 2}$.

Note : On a bien sûr pour tout réel $\varepsilon > 0$

$$(\forall\, p \geqslant 2), \quad T_p\left(\frac{p}{(1+\varepsilon)\ln 2}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2^{1+\varepsilon}-1} < 1 = T_p(t_p),$$

d'où pour p assez grand : $\dfrac{p}{(1+\varepsilon)\ln 2} < t_p$ et donc $\liminf\limits_{p\to+\infty} \dfrac{t_p}{p} \geqslant \dfrac{1}{(1+\varepsilon)\ln 2}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\liminf\limits_{p\to+\infty} \dfrac{t_p}{p} \geqslant \dfrac{1}{\ln 2}$. On montrerait de même que : $\limsup\limits_{p\to+\infty} \dfrac{t_p}{p} \leqslant \dfrac{1}{\ln 2}$, d'où le résultat.

18 Holomorphie de G_p. — Fixons un entier $p \geqslant 2$ et notons $g_n : z \mapsto \left(\dfrac{z}{z+n}\right)^p$, pour tout entier

$n \geqslant 1$. La fonction g_n est bien définie holomorphe sur l'ouvert $\Gamma = \mathbb{C} \setminus \{-k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ et on peut écrire : $g_n(z) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ ce qui assure que G_p est bien définie sur Γ. Considérons un compact K non vide contenu dans Γ.
L'ensemble S des entiers relatifs < 0 est fermé et donc la fonction $z \mapsto d(z,S) = \inf_{k\in S} |z-k|$ est continue sur K et y atteint un minimum $d > 0$. Considérons un réel $R > 0$ tel que K soit contenu dans le disque fermé $D(0,R)$. Pour un entier $n > R$, on peut écrire : $(\forall\, z \in K),\ |g_n(z)| \leqslant \left(\dfrac{R}{n-R}\right)^p = a_n$. Pour un entier $n \leqslant R$, on a : $|g_n(z)| \leqslant \left(\dfrac{R}{|z+n|}\right)^p \leqslant \dfrac{R^p}{d^p} = a_n\cdot$ On vérifie que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolument et donc la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ sur K. La fonction $G_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, est holomorphe comme somme d'une série de fonctions holomorphes sur Γ, qui converge normalement sur tout compact de Γ.

19.(a) et (b) et (c) **Relation demandée.** — On a $F_p(t) \sim t^{p-2}$ lorsque $t \to 0^+$, ce qui assure son intégrabilité au voisinage de 0. La fonction F_p est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à support dans $[0,+\infty[$ avec $F_p(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Donc F_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite admet une transformée de Fourier définie sur $\mathbb{R}$. En outre, on peut écrire sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}(F_p)(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t-1}\, e^{-i\xi t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\, e^{-i\xi t}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^{p-1}e^{-(n+i\xi)t}\, dt.$$

Comme pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a $|t^{p-1}e^{-(n+i\xi)t}| = t^{p-1}e^{-nt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on peut écrire :

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} |t^{p-1}e^{-(n+i\xi)t}|\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-nt}\, dt = \frac{1}{n^p}\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mu_n$ converge et le théorème d'intégration terme à terme assure que :

$$\mathscr{F}(F_p)(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-(n+i\xi)t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-1)!}{(n+i\xi)^p},$$

soit la relation demandée, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout entier $p \geqslant 2$.

19.(d) **Équivalent souhaité.** — Comme la fonction : $t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et admet un prolongement analytique à l'origine, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(F_2)(\xi) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\, e^{-i\xi t}\, dt = \left[\frac{t}{e^t-1}\,\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{i\xi}\int_0^{+\infty} \frac{(1-t)e^t-1}{(e^t-1)^2}\, e^{-i\xi t}\, dt \\ &= \frac{1}{i\xi}\left(1 + \int_0^{+\infty} \frac{(1-t)e^t-1}{(e^t-1)^2}\, e^{-i\xi t}\, dt\right) \underset{|\xi|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{i\xi},\end{aligned}$$

le dernier point provenant du lemme de Lebesgue, puisque $t \mapsto \dfrac{(1-t)e^t-1}{(e^t-1)^2}$ est C^∞ intégrable sur $[0,+\infty[$. De la relation : $(i\xi)^2\mathscr{F}(F_2)(\xi) = \ G_2(i\xi)$, on en déduit le résultat souhaité.

19.(e) **Généralisation.** — La fonction $Y : t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$, prolongée par 1 à l'origine est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$. On en déduit que $Y_p : t \mapsto \dfrac{t^{p-1}}{e^t-1} = t^{p-2}Y(t)$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, avec $Y_p^{(k)}(0) = 0$

pour $0 \leqslant k < p-2$ et $Y_p^{(p-2)}(0) = (p-2)!$.
Montrons qu'elle est à décroissance rapide, ainsi que ses dérivées successives.
Vérifions par exemple que : $Y_p^{(k)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(e^{-\frac{t}{4}}\big)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
Sur $[1,+\infty[$, la fonction $L : t \mapsto \dfrac{1}{e^t-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$, vérifie : $L^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^k e^{-nt}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En effet, on a pour tout $t \geqslant 1$, $|(-n)^k e^{-nt}| \leqslant n^k e^{-n} = o(e^{-\frac{n}{2}})$, ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^k e^{-nt}$ sur $[1,+\infty[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'identité découle du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions alors. On a en outre : $e^{\frac{t}{2}} L^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^k e^{(-n+1/2)t}$, qui est de même une somme de série de fonctions qui converge normalement sur $[1,+\infty[$.
Le théorème d'interversion des limites assure que l'on a : $L^{(k)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-\frac{t}{2}})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On en déduit par la formule de Leibniz que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$e^{\frac{t}{4}} Y_p^{(k)}(t) = e^{\frac{t}{4}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \big(t^{p-1}\big)^{(i)} L^{(k-i)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e^{-\frac{t}{4}} \big(t^{p-1}\big)^{(i)} L^{(k-i)}(t) e^{\frac{t}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

d'où ce premier point. Ainsi, $Y_p^{(k)}$ est continue intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(F_p)(\xi) &= \int_0^{+\infty} Y_p(t)\ e^{-i\xi t}\ dt = \Big[Y_p(t)\ \frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{i\xi}\int_0^{+\infty} Y_p'(t)\ e^{-i\xi t}\ dt \\
&= \frac{Y_p(0)}{i\xi} + \frac{1}{i\xi}\int_0^{+\infty} Y_p'(t)\ e^{-i\xi t}\ dt \\
&= \frac{Y_p(0)}{i\xi} + \frac{Y_p'(0)}{(i\xi)^2} + \frac{1}{(i\xi)^2}\int_0^{+\infty} Y_p^{(2)}(t)\ e^{-i\xi t}\ dt \\
&= \frac{Y_p(0)}{i\xi} + \frac{Y_p'(0)}{(i\xi)^2} + \cdots + \frac{Y_p^{(p-2)}(0)}{(i\xi)^{p-1}} + \frac{1}{(i\xi)^{p-1}}\int_0^{+\infty} Y_p^{(p-1)}(t)\ e^{-i\xi t}\ dt \\
&= \frac{(p-2)!}{(i\xi)^{p-1}} + \frac{1}{(i\xi)^{p-1}}\int_0^{+\infty} Y_p^{(p-1)}(t)\ e^{-i\xi t}\ dt,
\end{aligned}$$

et donc par le lemme de Lebesgue, on a : $\mathscr{F}(F_p)(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\sim} \dfrac{(p-2)!}{(i\xi)^{p-1}}$ puis : $G_p(i\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\sim} \dfrac{i\xi}{p-1}$.

20.(a) ***H* est méromorphe.** — Pour rester dans le programme de l'agrégation externe, on va raisonner directement. Les propriétés de G_2 vues précédemment assurent que H est définie, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ avec :

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Par ailleurs, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on peut écrire autour de m :

$$H(z) = \frac{1}{(z-m)^2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq m}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{(z-m)^2} + \upsilon_m(z),$$

où l'on vérifie comme précédemment pour G_p l'analyticité de υ_m autour de m. Ainsi, la fonction H est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et présente un pôle double en chaque élément $m \in \mathbb{Z}$, ce qui assure qu'elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

20.(b) ***H* est 1-périodique.** — Immédiat par translation d'indice sur $\mathbb{Z}$.

20.(c) **Relation souhaitée.** — On a vu que H est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et présente comme pôles les éléments $m \in \mathbb{Z}$. La fonction $h_\pi : z \mapsto \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ est également méromorphe sur $\mathbb{C}$ et présente comme pôles les éléments de $\mathbb{Z}$. Plus précisément, cette fonction s'écrit autour de $m \in \mathbb{Z}$:

$$h_\pi(z) \underset{z=m+s}{=} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi s)}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{1-\cos(2\pi s)} = \frac{1}{s^2\sigma_\pi(s)}, \text{ où}$$

$\sigma_\pi : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2n)!}(2\pi s)^{2(n-1)}$ est analytique autour de 0, avec : $\sigma_\pi(0) = 1$.

La fonction σ_π étant paire, on a $\dfrac{1}{\sigma_\pi(s)} = 1 + O(s^2)$, sans terme en s ; on a donc autour de $m \in \mathbb{Z}$: $h_\pi(z) = \dfrac{1}{(z-m)^2} + \vartheta_m(z)$, où ϑ_m est analytique autour de m.

En résumé, H et h_π sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ et admettent les mêmes parties principales. Ainsi la fonction : $\kappa = H - h_\pi$ se prolonge en une fonction entière. On va vérifier qu'elle est bornée.

Remarquons que κ est également 1-périodique. Il suffit alors de vérifier qu'elle est bornée sur la bande verticale : $\mathscr{B} = \{z \in \mathbb{C}\ ; 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$. Introduisons : $\mathscr{R} = \{z = x + iy \in \mathscr{B}\ ; -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ qui est un rectangle contenu dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{R}' = \mathscr{B} \backslash \mathscr{R}$.

La fonction κ est entière donc est bornée sur le compact $\mathscr{R}$. Pour tout $z = x + iy \in \mathscr{R}'$, on peut écrire :

$$|\sin(\pi z)| = \frac{1}{2}|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}| \geqslant \frac{1}{2}||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|| = \frac{1}{2}|e^{-\pi y} - e^{\pi y}| = |\mathrm{sh}(\pi y)| \geqslant \mathrm{sh}\pi,$$

et par suite : $|h_\pi(z)| = \left(\dfrac{\pi}{|\sin(\pi z)|}\right)^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{(\mathrm{sh}\pi)^2}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z+n|^2 = (x+n)^2 + y^2 \geqslant n^2 + 1$ et pour $n \geqslant 1$, on a :

$$|z-n|^2 = (x-n)^2 + y^2 \geqslant (n-1)^2 + 1.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |H(z)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z+n|^2} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(n-1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Il en découle que $\kappa = H - h_\pi$ est bornée sur $\mathscr{B}$ et par suite sur $\mathbb{C}$. Le théorème de Liouville assure que κ est constante. On a vu que : $G_2(i\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\sim} i\xi$, d'où on en déduit :

$$\kappa(i\xi) = H(i\xi) - \left(\frac{\pi}{\sin(i\pi\xi)}\right)^2 = -\frac{1}{\xi^2}\big(G_2(i\xi) + 1 + G_2(-i\xi)\big) + \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}(\pi\xi)}\right)^2 \xrightarrow[\xi\to+\infty]{} 0,$$

et par suite $\kappa = 0$, ce qui établit la relation demandée.

20.(d) **Calcul de $\zeta(2)$.** — On peut écrire pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) - \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Les séries de fonctions du membre de droite convergent normalement sur $[0,1/2]$ donc sa limite à l'origine est $2\zeta(2)$. Pour le membre de gauche, on peut écrire sur $]0,1[$:

$$\begin{aligned} H(x)-\frac{1}{x^2} &= \left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{\left(\pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} + o(x^3)\right)^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\pi^2 x^2}{6}+o(x^2)\right)^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{\pi^2 x^2}{3}+o(x^2)-1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi^2}{3}\cdot \end{aligned}$$

On en déduit : $2\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{3}$ et donc : $G_2(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$

Partie III : Déterminations du logarithme

21 Relation souhaitée. — On a : $\exp(\varphi_1) = \exp(\varphi_2)$ ou encore : $\exp(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, sur Ω.
Ainsi $\varphi_1 - \varphi_2$ est continue, et vérifie $(\varphi_1 - \varphi_2)(\Omega) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$. Or, $(\varphi_1 - \varphi_2)(\Omega)$, en tant qu'image continue d'un connexe, est connexe et $2i\pi\mathbb{Z}$ est un ensemble discret. On en déduit que $(\varphi_1 - \varphi_2)(\Omega)$ est un singleton et donc qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que : $\varphi_1 - \varphi_2 = 2ip\pi$.

22 Existence de c. — Introduisons sur Ω, la fonction : $g : z \mapsto z\exp(-f(z))$. La fonction g est holomorphe par les théorèmes généraux et vérifie $g' = 0$. Comme Ω est un connexe qui ne contient pas l'origine, il existe une constante complexe non nulle, que l'on peut écrire $C_\Omega = \exp(c)$, telle que : $g = \exp(c)$, ou encore : $(\forall\, z \in \Omega),\ \exp(f(z) + c) = z$, ce qui constitue le résultat.

23.(a) **Analyticité demandée.** — La fonction f_1 est somme d'un développement en série entière au voisinage de 1, de rayon de convergence 1. Elle est donc analytique sur l'ouvert Ω_1.

23.(b) **Propriété souhaitée.** — Voici deux démonstrations de ce résultat.
Preuve 1. La fonction f_1 vérifie :

$$(\forall\, z \in \Omega_1),\ f_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-z)^{n-1} = \frac{1}{z}\cdot$$

D'après ce qui précède, on dispose de $C \in \mathbb{C}$ tel que $f_1 + C$ soit une détermination du logarithme sur Ω_1. Alors : $(\forall z \in \Omega_1)$, $e^{f_1(z)+C} = z$. En particulier : $e^{f_1(1)+C} = 1$, *i.e.* $e^C = 1$ soit : $(\forall z \in \Omega_1),\ e^{f_1(z)} = z$.

Preuve 2. Pour tout $t \in]0,2[$, $f_1(t) = \ln(t)$ donc $e^{f_1(t)} = t$ donc $\exp \circ f_1$ et $z \mapsto z$ coïncident sur $]0,2[$ donc, par le principe des zéros isolés et la connexité de Ω_1, $\exp \circ f_1$ et $z \mapsto z$ coïncident sur Ω_1.

24.(a) **Analyticité demandée.** — Voici deux démonstrations de ce résultat.
Preuve 1. Remarquons que pour tout complexe $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$, on a :

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \iff |z-1|^2 < |z+1|^2 \iff (z-1)(\bar{z}-1) < (z+1)(\bar{z}+1) \iff \mathrm{Re}(z) > 0.$$

On en déduit que : $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$, pour tout $z \in \Omega_2$. En notant $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ et en posant $g_1 : z \in \Omega_2 \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ et $g_2 : z \in D \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1}$, on a : $g_1(\Omega_2) \subset D$ et $f_2 = g_2 \circ g_1$. Or, g_1 et g_2 sont holomorphes. Donc f_2 l'est aussi.

Preuve 2. Introduisons sur Ω_2 la fonction $f_{2,n} : z \mapsto \dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et considérons un compact K non vide contenu dans Ω_2. Comme $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ est continue sur Ω_2, on peut alors poser : $M_K = \sup\limits_{z\in K}\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \max\limits_{z\in K}\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$.
On a alors pour tout $z \in K$: $|f_{2,n}(z)| \leqslant \dfrac{2M_K^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence normale sur K de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_{2,n}$. Chaque fonction $f_{2,n}$ étant holomorphe sur Ω_2, la fonction $f_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{2,n}$, est holomorphe comme somme d'une série de fonctions holomorphes sur Ω_2, qui converge normalement sur tout compact de Ω_2.

24.(b) $\boldsymbol{f_2(x) = \ln x}$**.** — La série entière : $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2}{2n+1}t^{2n+1}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$, avec : $\varphi'(t) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}$, ce qui fournit : $\varphi(t) = \varphi(0) + \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
En prenant $t = \dfrac{x-1}{x+1} \in]-1,1[$, il vient : $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) = \ln x$.

24.(c) **Propriété de $\boldsymbol{f_2}$.** — Pour répondre à cette question, on peut calculer f_2' et conclure comme à la question **23**.(b) ou remarquer que $\exp(f_2)$ est holomorphe sur Ω_2 qui est connexe et coïncide avec la fonction holomorphe : $z \mapsto z$ sur $]0,+\infty[$; on achève enfin en appliquant le principe des zéros isolés.

25.(a) et (b) **Holomorphie de $\boldsymbol{f}$.** — Traitons le cas : $F = \exp(f)$, holomorphe sur Ω. Considérons $\omega \in \Omega$. On sait que l'on a autour de l'origine : $\exp(\xi) - 1 \sim \xi$. Comme f est continue, on peut écrire :

$$f(\omega+h) - f(\omega) \underset{h\to0}{\sim} \exp\big(f(\omega+h) - f(\omega)\big) - 1 = \frac{F(\omega+h) - F(\omega)}{F(\omega)},$$

ce qui conduit à : $\dfrac{f(\omega+h)-f(\omega)}{h} \underset{h\to0}{\sim} \dfrac{F(\omega+h)-F(\omega)}{hF(\omega)} \xrightarrow[h\to0]{} \dfrac{F'(\omega)}{F(\omega)}$.
Le résultat annoncé en découle.
Remarque : voici une autre réponse à la question (a), inspirée de la question **23**. On se fixe $z_0 \in \Omega$. Comme f est une détermination du logarithme sur Ω, $z_0 \neq 0$. On pose $g : z \mapsto -\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{z_0-z}{z_0}\right)^n$, bien définie au voisinage de z_0. Alors pour tout z proche de z_0, $g'(z) = 1/z$. La question **22** assure alors que l'on dispose de $C \in \mathbb{C}$ tel que $g + C$ soit une détermination du log sur un petit disque autour de z_0. La question **21** assure maintenant que, sur un petit disque autour de z_0, f et g diffèrent d'une constante, ce qui montre que f est holomorphe sur un petit disque autour de z_0, et ce pour tout $z_0 \in \Omega$, d'où l'holomorphie de f.

26.(a) **Existence demandée.** — Voici deux démonstrations de ce résultat.
Preuve 1. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ étant holomorphe sur l'ouvert étoilé $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathscr{D}$, elle possède une primitive f holomorphe sur Ω. L'ouvert Ω étant connexe, la question **22** assure qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f + c$ soit une détermination du logarithme sur Ω.

Preuve 2. On écrit $\mathscr{D} = (\mathbb{R}_+)z_0$, avec $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$, et on pose $f(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$, où $r > 0$ et $\theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$. Alors f est continue et constitue une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+)z_0$.

26.(b) **Existence de Log.** — L'unicité vient de la question **21** et l'existence de la question précédente.

26.(c) **Expression de Log.** — Les fonctions Log et f_1 sont des déterminations du logarithme sur Ω_1 qui s'annulent en 1. Ces fonctions coïncident donc sur Ω_1. Il en découle :

$$(\forall\, z \in \mathbb{C}),\ (|z|<1) \Longrightarrow\ \mathrm{Log}(1-z) = f_1(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

ce qui constitue le résultat.

26.(d) **Pas détermination du Log sur $\mathbb{C}^*$.** — Voici deux démonstrations de ce résultat.
Preuve 1. Supposons par l'absurde disposer d'une détermination f du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f'(z) = 1/z$ donc en notant γ le chemin : $t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, on a :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi$$

ce qui donne la contradiction.
Preuve 2. Sur l'ouvert connexe non vide $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $f|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-}$ et Log diffèrent d'une constante complexe. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $f(z) = \lambda + \mathrm{Log}(z)$. La continuité de f en -1 assure alors que

$$f(-1) = \lim_{t\to\pi^-} f(e^{it}) = \lim_{t\to\pi^-} \lambda + \mathrm{Log}(e^{it}) = \lambda + i\pi$$

et

$$f(-1) = \lim_{t\to(-\pi)^+} f(e^{it}) = \lim_{t\to(-\pi)^+} \lambda + \mathrm{Log}(e^{it}) = \lambda - i\pi$$

donc $\lambda + i\pi = \lambda - i\pi$, ce qui donne la contradiction.

27.(a) **ψ est bien définie.** — Pour tout $z \in \Omega_3$, la fonction : $t \mapsto \dfrac{e^{iz\ln t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et l'on a : $\dfrac{|e^{iz\ln t}|}{t^2} = \dfrac{e^{-\mathrm{Im}(z)\ln t}}{t^2} = \dfrac{1}{t^{2+\mathrm{Im}(z)}}\cdot$ Comme $2+\mathrm{Im}(z) > 1$, l'intégrande est intégrable sur $[1, +\infty[$ ce qui assure l'existence de $\psi(z)$.

27.(b) **Expression souhaitée.** — L'application : $x \mapsto e^x$ est un C^1 difféomorphisme de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, d'où il constitue un changement de variable licite et l'on a : $(\forall\, z \in \Omega_3)$,

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{izx}}{e^x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{(-1+iz)x}\, dx = \frac{1}{1-iz}\cdot$$

27.(c) **Limite souhaitée.** — On a successivement, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n > |z|^2$:

$$\begin{aligned}
\psi^n\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) e^{-iz\sqrt{n}} &= \left(1 - \frac{iz}{\sqrt{n}}\right)^{-n} e^{-iz\sqrt{n}} = \left(e^{\mathrm{Log}\left(1-\frac{iz}{\sqrt{n}}\right)}\right)^{-n} e^{-iz\sqrt{n}} \\
&= e^{-n\mathrm{Log}\left(1-\frac{iz}{\sqrt{n}}\right)} e^{-iz\sqrt{n}} = e^{-n\mathrm{Log}\left(1-\frac{iz}{\sqrt{n}}\right)-iz\sqrt{n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{iz}{\sqrt{n}} - \frac{z^2}{2n} + o(1/n)\right)-iz\sqrt{n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{z^2}{2}+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{z^2}{2}},
\end{aligned}$$

d'où on en déduit :

$$\psi^n\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) e^{-iz\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Partie IV : Sommes de fractions unitaires

On note $S_\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$.

28.(a) **$\mathscr{P}_\infty(u)$ est bien définie.** — On a : $0 \leqslant \varepsilon_n u_n = O(u_n)$, ce qui assure la convergence $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varepsilon_n u_n$, et que $\mathscr{P}_\infty(u)$ est bien définie.

28.(b) **Détermination de $\mathscr{P}_\infty(u)$.** — La suite u est à support fini donc est dans ℓ^+ et on a successivement :

$$\mathscr{P}_\infty(u) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k 2^{k-1};\ (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \in \{0,1\}^p \right\},$$

qui correspond exactement à l'écriture binaire des entiers de $[\![0, 2^p-1]\!]$.
On en déduit que dans ce cas, on a : $\mathscr{P}_\infty(u) = [\![0, 2^p-1]\!]$.

29 $\mathscr{P}_\infty(u)$ est fini ssi son support l'est. — Notons $S = \{k \in \mathbb{N}^* \,;u_k > 0\}$.
Vérifions que $\mathscr{P}_\infty(u)$ est fini ssi S est fini. Si S est fini, on a clairement $\mathscr{P}_\infty(u)$ qui est fini.
Supposons le support S infini et considérons un entier $n \geqslant 1$. Notons alors : $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ des éléments de S. Alors l'application : $j \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{j} u_{k_i}$ réalise une injection strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans $\mathscr{P}_\infty(u)$, ce qui assure l'existence d'au moins n éléments dans $\mathscr{P}_\infty(u)$, pour tout entier $n \geqslant 1$, et par suite que $\mathscr{P}_\infty(u)$ est infini.

30 $\mathscr{P}_\infty(u) = [0,a]$. — On a clairement $u \in \ell^+$. Considérons $x \in \mathscr{P}_\infty(u)$.
On peut écrire : $0 \leqslant x \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2^n} = a$, d'où $\mathscr{P}_\infty(u) \subset [0,a]$. Pour le choix des suites constantes $\varepsilon \equiv 0$ et $\varepsilon \equiv 1$, on obtient les réels 0 et a. Sinon, pour $x \in]0,a[$, l'existence du développement dyadique du réel $x/a \in]0,1[$ assure que $x \in \mathscr{P}_\infty(u)$. On en déduit le résultat annoncé.

31.(a) et (b) **$\mathscr{P}_\infty(u) \subset \mathcal{K}(S)$.** — On a $u \in \ell^+$ comme une suite géométrique convergente. Remarquons que si $x \in \mathscr{P}_\infty(u)$, on a : $0 \leqslant x \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p-1}$.
On en déduit que : $\mathscr{P}_\infty(u) \subset S$. Par ailleurs, si S est une réunion finie de segments disjoints de $\mathbb{R}$, on vérifie facilement que $\mathcal{K}(S)$ est également une réunion finie de segments disjoints de $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\mathcal{K}(S) \subset S$. En outre, on a : $\mathcal{K}(S) = \left[0, \dfrac{1}{p(p-1)}\right] \cup \left[\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p-1}\right]$. Notons I_0^1 et I_1^1 ces intervalles.
Si $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{p^n} \in \mathscr{P}_\infty(u)$, où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S_\infty$ est tel que $\varepsilon_1 = 0$, on a : $0 \leqslant x \leqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p(p-1)}$, c'est-à-dire que : $x \in I_0^1$.
De même, on vérifie que si $\varepsilon_1 = 1$, on a : $\dfrac{1}{p} \leqslant x \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p-1}$, c'est-à-dire que : $x \in I_1^1$.
On a donc établi que : $\mathscr{P}_\infty(u) \subset \mathcal{K}(S)$.

31.(c) **$\mathscr{P}_\infty(u) \subset \mathcal{K}\big(\mathcal{K}(S)\big)$.** — On peut écrire :

$$\mathcal{K}\big(\mathcal{K}(S)\big) = \left[0, \frac{1}{p^2(p-1)}\right] \cup \left[\frac{1}{p^2}, \frac{1}{p(p-1)}\right] \cup \left[\frac{1}{p}, \frac{p^2-p+1}{p^2(p-1)}\right] \cup \left[\frac{p+1}{p^2}, \frac{1}{p-1}\right].$$

Notons ces intervalles respectivement : $I_{00}^2, I_{01}^2, I_{10}^2$ et I_{11}^2. Si x est tel que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (i,j) \in \{0,1\}^2$, on a : $\dfrac{i}{p} + \dfrac{j}{p^2} \leqslant x \leqslant \dfrac{i}{p} + \dfrac{j}{p^2} + \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{i}{p} + \frac{j}{p^2} + \frac{1}{p^2(p-1)}$, ce qui assure que $x \in I_{ij}^2$ et que $x \in \mathcal{K}\big(\mathcal{K}(S)\big)$.

31.(d) $\mathscr{P}_\infty(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$. — On peut s'inspirer de ce qui précède. On vérifie à l'aide d'une récurrence que S_n est bien définie, constitué d'une réunion disjointe de 2^n segments de longueur $\mu_n = \dfrac{1}{p^n(p-1)}$, que nous noterons $(I_\varepsilon^n)_{\varepsilon\in\{0,1\}^n}$, où $I_\varepsilon^n = [m_\varepsilon, M_\varepsilon]$ avec : $m_\varepsilon = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{p^k}$ et $M_\varepsilon = m_\varepsilon + \mu_n$, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \{0,1\}^n$. On a vu également que $S_{n+1} = \mathcal{K}(S_n) \subset S_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$, ce qui assure que $\big(S_n\big)_{n\geqslant 1}$ constitue une suite décroissante de parties de $\mathbb{R}$.

Considérons : $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{p^n} \in \mathscr{P}_\infty(u)$, où $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S_\infty$ et fixons un entier $q \geqslant 1$. On peut écrire que :

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{\eta_n}{p^n} \leqslant x \leqslant \sum_{n=1}^{q} \frac{\eta_n}{p^n} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^n} \leqslant \sum_{n=1}^{q} \frac{\eta_n}{p^n} + \frac{1}{p^q(p-1)},$$

ce qui assure que : $x \in I_\eta^q$, où $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_q)$ et donc que $x \in S_q$. Ce résultat est valable, pour tout $q \geqslant 1$ et par suite que : $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$.

Réciproquement, considérons : $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$. Introduisons la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S_∞ définie par récurrence comme suit :
le réel $x \in S_1$ et donc il existe un unique $\varepsilon_1 \in \{0,1\}$ tel que : $x \in I_{\varepsilon_1}^1$.
Supposons $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, définies tels que : $x \in I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}^k$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.
On sait que : $x \in S_{n+1}$. Comme S_{n+1} possède des intervalles deux à deux disjoints, chacun contenu dans ceux de S_n, il en découle qu'il en existe un unique qui contient x, inclus donc dans $I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}^n$, et qui s'écrit alors : $I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\tau}^{n+1}$, avec $\tau \in \{0,1\}$. On peut alors poser : $\varepsilon_{n+1} = \tau$, ce qui assure ce premier point.
On a donc mis en évidence une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S_∞ tel que : $x \in I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}^n$, ou encore, en reprenant les notations du début de cette question, tel que : $m_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \leqslant x \leqslant m_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} + \mu_n$, pour tout $n \geqslant 1$. Il en résulte que :

$$m_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{p^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \mathscr{P}_\infty(u).$$

32.(a) **Propriétés de β.** — On a : $0 \leqslant \dfrac{1}{p^{\lfloor n\alpha\rfloor}} \leqslant \dfrac{1}{p^{n\alpha-1}} = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, d'où la convergence de la série proposée. Supposons $\alpha = \dfrac{c}{d}$, où c et d sont dans $\mathbb{N}^*$. On peut alors écrire successivement :

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p^{\lfloor (i+kd)\alpha\rfloor}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p^{\lfloor i\alpha+kc\rfloor}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{p^{kc}} = \frac{Ap^c}{p^c-1},$$

où l'on a posé : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p^{\lfloor i\alpha\rfloor}}$, qui est bien rationnel, et par suite $\beta \in \mathbb{Q}$.

32.(b) **Propriété de $\big(\beta_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** — On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta_n = \left\lfloor \frac{n+1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{n}{\alpha}\right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \underbrace{\operatorname{frac}\left(\frac{n}{\alpha}\right)}_{<1} + \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{<1} \right\rfloor \in \{0,1\},$$

d'où le résultat annoncé.

32.(c) **Relation demandée.** — Notons : $I_\alpha = \{\lfloor k\alpha \rfloor\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$. Le réel α étant irrationnel, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\beta_n = 0 &\iff \left\lfloor \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \iff \exists k \in \mathbb{N}\ ;\ k < \frac{n}{\alpha} < \frac{n+1}{\alpha} < k+1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N}\ ;\ k\alpha < n < n+1 < (k+1)\alpha \iff \exists k \in \mathbb{N}\ ;\lfloor k\alpha \rfloor < n < \lfloor (k+1)\alpha \rfloor \\ &\iff n \notin I_\alpha,\end{aligned}$$

le dernier point provenant du fait que la partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{p^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\lfloor k\alpha \rfloor}} = \beta$, le membre de gauche étant le développement p-adique de β, puisque $p \geqslant 3$.

32.(d) $\boldsymbol{\beta \notin \mathbb{Q}}$**.** — Démontrons que la suite $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne finit pas par être périodique.
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'elle finisse par être périodique.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 1$ tels que : $\beta_{n+q} = \beta_n$, pour tout $n \geqslant N$.
En particulier, on a : $\beta_{N+kq} = \beta_N$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc : $(\forall\, k \in \mathbb{N})$,

$$\begin{aligned}\beta_N = \beta_{N+kq} &= \left\lfloor \frac{N+kq+1}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N+kq}{\alpha} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \operatorname{frac}\left(\frac{N+kq}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \operatorname{frac}\left(s_\mu + k\mu\right) + \frac{1}{\alpha} \right\rfloor,\end{aligned}$$

où l'on a posé : $s_\mu = \dfrac{N}{\alpha} > 0$ et $\mu = \dfrac{q}{\alpha} > 0$ est irrationnel. Alors l'ensemble $\mathbb{Z} + \mu\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, partout dense dans $\mathbb{R}$. Vérifions en fait que $\mathbb{Z} + \mu\mathbb{N}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$. Considérons des réels $a < b$ et vérifions que $\mathbb{Z} + \mu\mathbb{N}$ rencontre $[a, b]$. Si $ab \leqslant 0$, le résultat est clair. Sinon, supposons $0 < a < b$, pour se fixer les idées. On sait qu'il existe : $\tau = r\mu + s$ tel que : $0 < \tau < b - a$, avec $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$. Si $r \geqslant 0$, on peut écrire que : $k\tau \in \left(\mathbb{Z} + \mu\mathbb{N}\right) \cap [a, b]$, où l'on a posé $k = \lfloor a/\tau \rfloor + 1$.
Si $r < 0$, on introduit un entier $p_b \geqslant b$ et on a : $p_b - (k+1)\tau \in \left(\mathbb{Z} + \mu\mathbb{N}\right) \cap [a, b]$, où l'on a posé $k = \left\lfloor \dfrac{p_b - b}{\tau} \right\rfloor$, ce qui établit la densité annoncée. On en déduit que l'ensemble des termes de la suite

$$\left(\operatorname{frac}(s_\mu + k\mu) + \frac{1}{\alpha}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\operatorname{frac}(s_\mu + k\mu + r) + \frac{1}{\alpha}\right)_{k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}}$$

est dense dans $\left[\dfrac{1}{\alpha}, 1 + \dfrac{1}{\alpha}\right]$. Comme le réel $\dfrac{1}{\alpha}$ n'est pas un entier, la suite $\left(\left\lfloor \operatorname{frac}\left(s_\mu + k\mu\right) + \dfrac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)_{k\in\mathbb{N}}$ prend exactement deux valeurs, ce qui contredit qu'elle soit constante égale à β_N.

Autre méthode : Supposons qu'il existe $N \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ tels que $\beta_{n+q} = \beta_n$ pour tout $n \geqslant N$. Le préfixe fini étant négligeable dans la moyenne,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{q}\sum_{k=N}^{N+q-1} \beta_k \in \mathbb{Q}.$$

Or, par télescopage,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Q}.$$

C'est une contradiction.

33 $\mathscr{P}_\infty(u)\cap\mathbb{Q}$ et $\mathscr{P}_\infty(u)\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ sont infinis. — Posons : $u_n=\dfrac{1}{a_n}$ où $a_n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $n\geqslant 1$. L'application $n\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ constitue une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathscr{P}_\infty(u)$, à valeurs rationnelles d'où il y a une infinité de rationnels dans $\mathscr{P}_\infty(u)$.
Comme $u\in\ell^+$, on a : $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. On peut donc en extraire $\big(a_{n_k}\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$, telle que : $r_k=a_{n_k}$ vérifie : $r_{k+1}>r_k^2-r_k+1$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Considérons sur $\mathbb{N}^*$ la fonction $\varphi:k\mapsto n_k$ et le réel $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{a_n}$, où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in S_\infty$ est telle que $\varepsilon_n=1$ ssi $n\in\varphi\big(\mathbb{N}^*\big)$. Alors, le réel : $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}$, vérifie donc : $r_{k+1}>r_k^2-r_k+1$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Le critère vu en partie **I** permet d'affirmer alors que x est irrationnel. En outre, l'application $p\mapsto x_p=\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty}\frac{1}{r_k}$, constitue une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathscr{P}_\infty(u)$, à valeurs irrationnelles d'où il y a une infinité d'irrationnels dans $\mathscr{P}_\infty(u)$ et le résultat annoncé.

34.(a) et (b) **Étude de l'unicité de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** — Il a été vu en **7** que $u\in\ell^+$.
Commençons par remarquer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n}=\frac{1}{s_1-1}=1$ et par suite que : $\mathscr{P}_\infty(u)\subset[0,1]$. Soit : $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}$, avec $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in S_\infty$, un élément de $\mathscr{P}_\infty(u)$.

• Si $x<1/2$, cela impose que : $\varepsilon_1=0$. Ainsi, dans ce cas on peut écrire que : $x=\dfrac{\varepsilon_2}{s_2}+\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}$, ce qui fournit la relation : $s_2x=\varepsilon_2+\sigma$, où : $\sigma=s_2\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}$ vérifie : $0\leqslant\sigma\leqslant s_2\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{s_n}=\frac{s_2}{s_3-1}<1$, ce qui assure que : $\varepsilon_2=\lfloor s_2x\rfloor$. Une méthode analogue permet de voir que si $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ sont définies de manière unique, on a : $\varepsilon_{n+1}=\lfloor s_{n+1}\varrho\rfloor$, où $\varrho=x-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{s_k}$, et donc ε_{n+1} est définie de manière unique, pour tout $n\geqslant 2$. Une récurrence permet d'assurer l'unicité des termes de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et l'unicité dans ce premier cas.

• Pour $x=\dfrac{1}{2}$, il n'y a pas unicité puisque : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{s_1}=\dfrac{1}{s_2-1}=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{s_n}\cdot$

• Pour $x>1/2$, on a : $\varepsilon_1=1$, puisque : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{s_n}=\frac{1}{2}<x$. Alors, on en déduit la relation : $x'=x-\dfrac{1}{2}=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}\cdot$ Une fois $\varepsilon_1=1$ fixé, le même procédé de détermination successive des chiffres de la queue assure leur unicité. Cela reste valable pour $x=1$; dans ce cas, tous les chiffres sont égaux à 1.
En conclusion, pour tout $x\in\mathscr{P}_\infty(u)$, il existe une unique suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S_∞ telle que : $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{s_n}$, à l'exception de $\dfrac{1}{2}\cdot$

34.(c) **Caractérisation des rationnels de $\mathscr{P}_\infty(u)$.** — Si la suite $\varepsilon_S=(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ finit par stationner à 0, x est clairement rationnel. Si elle finit par stationner à 1, il existe $N>1$ tel que $\varepsilon_n=1$, pour tout $n\geqslant N$ et donc :

$$x=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon_n}{s_n}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{s_n}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon_n}{s_n}+\frac{1}{s_N-1},$$

qui est bien rationnel. Sinon, la suite ε_S ne finit pas par stationner.

Introduisons dans ce dernier cas, son support : $A = \{k \in \mathbb{N}^* \,;\varepsilon_k = 1\}$. Les hypothèses assurent que A est infini, ainsi que son complémentaire dans $\mathbb{N}^*$. L'ensemble de ses éléments constitue une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et l'on a la relation : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_{n_k}}$. Notons $\sigma_k = s_{n_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la relation : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k}$ constitue le développement en série de Sylvester du réel x.
Les hypothèses sur A assurent que l'on a, pour tout entier $k \geqslant 1$: $\sigma_{k+1} \geqslant \sigma_k^2 - \sigma_k + 1$ avec des inégalités strictes pour une infinité de termes. L'étude menée sur le développement en série de Sylvester montre que x est un réel irrationnel, d'où le résultat annoncé.

35.(a) **$0 \in \mathscr{P}_\infty(u)$ et $\sigma \in \mathscr{P}_\infty(u)$.** — Ces réels sont obtenus pour le choix respectif des suites constantes $\varepsilon \equiv 0$ et $\varepsilon \equiv 1$.

35.(b) **$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas constante.** — Supposons $\varepsilon \equiv 0$. D'après la définition de la suite ε, on a : $0 < x < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui conduit, par passage à la limite (puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), à $x \leqslant 0$, ce qui est absurde.
Le cas $\varepsilon \equiv 1$ est analogue.

35.(c) **$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne finit pas par stationner à la valeur 1.** — La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas constante donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon_N = 0$. Considérons un entier $n \geqslant N$.
Nous allons établir qu'il existe un entier $p_n > n$ tel que : $\varepsilon_{p_n} = 0$. Comme $\varepsilon_N = 0$, on peut introduire $p = \max\{k \in [\![1, n]\!] \,;\varepsilon_k = 0\}$. On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k u_k \leqslant x < \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k u_k + u_p$.
Par définition de p, on peut alors écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k u_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k u_k + u_p > x.$$

Il existe donc un entier $q > n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{q} u_k > x - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k$. Notons p_n le plus petit de ces entiers.
On a donc $p_n > n$ et vérifie : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k + \sum_{k=n+1}^{p_n-1} u_k \leqslant x < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k + \sum_{k=n+1}^{p_n} u_k$, avec des conventions évidentes si $p_n = n + 1$. On vérifie alors que $\varepsilon_{p_n} = 0$, d'où le résultat annoncé.

35.(d) **Résultat annoncé.** — La suite ε ne stationne pas à la valeur 1 donc on peut en extraire une sous-suite $(\varepsilon_{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ identiquement nulle. Notons $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$, réel qui est clairement défini.
On a par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{p_n} \varepsilon_k u_k \leqslant x < \sum_{k=1}^{p_n} \varepsilon_k u_k + u_{p_n},$$

d'où par un passage à la limite, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient : $y \leqslant x \leqslant y$ et l'identité annoncée.
Démontrons le résultat annoncé. Il est clair que $\mathscr{P}_\infty(u) \subset [0, \sigma]$. Montrons l'inclusion inverse.
Si $x \in \{0, \sigma\}$, le résultat a déjà été vu. Considérons $0 < x < \sigma$ et introduisons la suite ε qui lui est associée précédemment. On a vu que : $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n \in \mathscr{P}_\infty(u)$, ce qui établit le résultat.

36.(a) et (b) **Termes substituables de u.** — On a clairement $u \in \ell^+$. En outre, il a été vu en **13**

que : $1 < t_2 < 2$. On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a successivement :

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \iff \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} \iff 1 \leqslant T_2(n) \iff t_2 \leqslant n \iff n \geqslant 2.$$

On voit donc que u_n est substituable dès que $n \geqslant 2$.

36.(c) **Détermination $\mathscr{P}_\infty(u)$.** — Les calculs vus en partie **II** ont montré que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Un réel x est un élément de $\mathscr{P}_\infty(u)$ si et seulement s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S_\infty$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2} = \varepsilon_1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2}}_{x'} = \varepsilon_1 + x'.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes substituables, donc la question qui précède assure que le réel x' décrit exactement $\left[0, \dfrac{\pi^2}{6} - 1\right]$ puis, comme $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}$, on en déduit le résultat annoncé.

37.(a) et (b) **Inégalité souhaitée.** — On a clairement $u \in \ell^+$. Par ailleurs, la comparaison série-intégrale conduit à, pour tout $x > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^3} \geqslant \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \int_3^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^3} = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{2(x+3)^2},$$

ce qui fournit : $T_3(x) \geqslant \dfrac{x^3}{(x+1)^3} + \dfrac{x^3}{(x+2)^3} + \dfrac{x^3}{2(x+3)^2}$, et le résultat demandé.

37.(c) **$2 < t_3 < 3$.** — On a déjà $2 < t_3$ par **13**.(b).
Par ailleurs, l'inégalité précédente donne : $T_3(3) \geqslant \dfrac{8103}{8000} > 1 = T_3(t_3)$, ce qui fournit : $2 < t_3 < 3$ et le résultat demandé.

37.(d) **Détermination $\mathscr{P}_\infty(u)$.** — Comme $2 < t_3 < 3$, on a de même, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{n^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \iff \frac{1}{n^3} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^3} \iff 1 \leqslant T_3(n) \iff t_3 \leqslant n \iff n \geqslant 3.$$

On voit donc que u_n est substituable pour $n \geqslant 3$. Un réel x est un élément de $\mathscr{P}_\infty(u)$ si et seulement s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S_\infty$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^3} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{8} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^3}}_{x'} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{8} + x'.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{(n+2)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes substituables, donc ce qui précède assure que le réel x' décrit exactement $[0, \zeta - 9/8]$. En traitant successivement les cas où : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0, 1\}^2$, on obtient :

$$\mathscr{P}_\infty(u) = \left[0, \zeta - \frac{9}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}, \zeta - 1\right] \cup \left[1, \zeta - \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{9}{8}, \zeta\right].$$

38.(a) et (b) **Existence de N_p.** — On a clairement $u \in \ell^+$. Notons :

$$W = \{n \in \mathbb{N}^* \,;\, u_n \text{ n'est pas substituable}\}.$$

On a de manière analogue, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \iff \frac{1}{n^p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^p} \iff 1 \leqslant T_p(n) \iff t_p \leqslant n \iff n \in [t_p, +\infty[\cap\mathbb{N}^*.$$

c'est-à-dire que l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tel que u_n soit substituable est $[t_p, +\infty[\cap\mathbb{N}^*$.
Comme la suite $\big(t_p\big)_{p\geqslant 2}$ est strictement croissante, on a pour $p \geqslant 2$: $t_p \geqslant t_2 > 1$, et donc l'ensemble W est un intervalle non vide et majoré de $\mathbb{N}^*$. On peut alors introduire : $N_p = \max W$, d'où le résultat.

38.(c) **Equivalent souhaité.** — On a : $N_p < t_p \leqslant N_p + 1$ et donc : $t_p - 1 \leqslant N_p < t_p$.
Comme on a vu que : $t_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p}{\ln 2}$, on en déduit le résultat annoncé.

38.(d) **Bijection souhaitée.** — Il suffit d'établir l'injectivité. Posons $r = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon_k u_k$.

Vérifions que : $\varepsilon_1 = \lfloor r/u_1 \rfloor$, et donc est définie de manière unique. On a : $\dfrac{r}{u_1} = \varepsilon_1 + \dfrac{1}{u_1}\displaystyle\sum_{k=2}^{N_p} \varepsilon_k u_k$.

Comme $1 \leqslant N_p$, le terme u_1 n'est pas substituable, ce qui permet d'écrire : $u_1 > \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} u_k \geqslant \sum_{k=2}^{N_p} \varepsilon_k u_k$ et donc : $r/u_1 = \varepsilon_1 + r'$, avec $r' \in [0,1[$. Puisque ε_1 est un entier, l'identité annoncée en découle.
On démontre ainsi par récurrence que chaque terme de $\big(\varepsilon_k\big)_{1\leqslant k\leqslant N_p}$ est définie de manière unique et donc le résultat annoncé.

38.(e) **Relation souhaitée.** — On reprend le raisonnement du **37**.(d).
Un réel x est un élément de $\mathscr{P}_\infty(u)$ si et seulement s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S_\infty$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N_p} \frac{\varepsilon_n}{n^p}}_{\omega} + \underbrace{\sum_{n=N_p+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}}_{x'}.$$

où $\omega \in \mathscr{P}_{N_p}$. La suite $\left(\dfrac{1}{(n+N_p)^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes substituables, donc ce qui précède assure que le réel x' décrit exactement $[0, \rho_p]$ et par suite x décrit exactement l'ensemble proposé.
Ce qui précède met en évidence 2^{N_p} segments distincts. Nous allons établir qu'ils sont deux à deux disjoints. Pour cela, considérons ω et ω' deux éléments de $\mathscr{P}_{N_p}$ tels que : $\omega < \omega'$.
Nous allons établir que l'on a : $\omega + \rho_p < \omega'$.
Notons : $\omega = \displaystyle\sum_{n=1}^{N_p} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$ et $\omega' = \displaystyle\sum_{n=1}^{N_p} \frac{\varepsilon'_n}{n^p}$ où $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant N_p}$ et $(\varepsilon'_k)_{1\leqslant k\leqslant N_p}$ sont des éléments de $\{0,1\}^{N_p}$. Comme $\omega < \omega'$, on peut introduire : $s = \min\{k \in [\![1, N_p]\!] \,;\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k\}$. On en déduit que si : $\omega_\tau = \displaystyle\sum_{n=s}^{N_p} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$ et $\omega'_\tau = \displaystyle\sum_{n=s}^{N_p} \frac{\varepsilon'_n}{n^p}$, on a : $\omega_\tau < \omega'_\tau$. On a vu que : $\varepsilon_s = \lfloor \omega_\tau s^p \rfloor \leqslant \lfloor \omega'_\tau s^p \rfloor = \varepsilon'_s$, ce qui conduit à $\varepsilon_s = 0$ et

$\varepsilon'_s = 1$. On peut écrire que : $\omega'_\tau \geqslant \dfrac{1}{s^p} > \displaystyle\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} > \sum_{s+1\leqslant k\leqslant N_p} \frac{1}{k^p} \geqslant \omega_\tau$. On en déduit que :

$$\omega' - \omega = \omega'_\tau - \omega_\tau > \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - \sum_{s+1\leqslant k\leqslant N_p} \frac{1}{k^p} = \rho_p,$$

et l'inégalité annoncée puis le résultat.

Note : L'algorithme glouton vu en **35** fournit les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{90^2} \;=\; \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{6^3},\\
\frac{1}{20} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{10^2} \;=\; \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{30^3},\\
\frac{2}{5} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{30^2}\\
\frac{3}{8} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{126^2} + \frac{1}{1036^2} + \frac{1}{121212^2}.
\end{aligned}$$

Cependant celui-ci ne semble pas terminer pour $1/2$. Toutefois, un petit programme sur ordinateur permet d'obtenir que l'une des plus courtes décompositions pour $1/2$ s'écrit :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{840^2}.$$

Partie V : Un théorème de Paul Lévy sur les séries de Sylvester

39 Existence de U. — Par hypothèse, on dispose de $V \sim \mathcal{U}([0,1])$. Il suffit alors de considérer la variable aléatoire : $U = V\mathbf{1}_{(V\in]0,1])} + \mathbf{1}_{(V\notin]0,1])}$.

40 Q_n est une var. — On introduit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $X_1 : \omega \in \Omega \mapsto U(\omega)$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} : \omega \in \Omega \mapsto X_n(\omega) - \dfrac{1}{\lfloor 1/X_n(\omega)\rfloor + 1}$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est bien définie, à valeurs dans $]0,+\infty[$ et mesurable (on rappelle que si f est une fonction réelle mesurable, alors $\lfloor f\rfloor$ l'est aussi). Or, d'après les questions **8** et **10**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \lfloor 1/X_n\rfloor + 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est mesurable : c'est une variable aléatoire.

41 Première propriété. — On a facilement $(s_1,\cdots,s_n) \in \mathscr{C}_n$ puisque les inégalités sont des égalités. Par ailleurs, si $(k_1,\cdots,k_n) \in \mathscr{C}_n$, on a : $k_1 \geqslant s_1 = 2$ et à l'aide d'une récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient facilement $k_i \geqslant s_i$, d'où le résultat.

42 Étude des événements. — On a successivement, pour tout entier $k \geqslant 2$: $(\forall\,\omega \in \Omega)$,

$$\big(\omega \in (Q_1 = k)\big) \iff \big(Q_1(\omega) = k\big) \iff \left\lfloor \frac{1}{U(\omega)} \right\rfloor + 1 = k \iff k-1 \leqslant \frac{1}{U(\omega)} < k,$$

$$\iff U(\omega) \in \left]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right] \iff \left(\omega \in \left(\frac{1}{k} < U \leqslant \frac{1}{k-1}\right)\right),$$

d'où le premier point. On a de même, pour tout $(k_1,k_2) \in \mathscr{C}_2$: $(\forall\,\omega \in \Omega)$,

$$\big(\omega \in \big(Q_1 = k_1, Q_2 = k_2\big)\big) \iff \left(\big(Q_1(\omega) = k_1\big) \cap \big(\frac{1}{k_2} < X_2(\omega) \leqslant \frac{1}{k_2 - 1}\big)\right)$$

$$\iff \left(\frac{1}{k_2} < U(\omega) - \frac{1}{k_1} \leqslant \frac{1}{k_2 - 1}\right)$$

$$\iff \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < U(\omega) \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 - 1}\right) \iff \left(\omega \in \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 - 1}\right)\right),$$

la deuxième équivalence résultant de ce que l'événement $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 - 1}\right)$ est inclus dans $(Q_1 = k_1)$. En effet, comme $(k_1, k_2) \in \mathscr{C}_2$, on a $k_2 - 1 \geqslant k_1(k_1 - 1)$, donc $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 - 1} \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1(k_1 - 1)} = \frac{1}{k_1 - 1}$. D'où le résultat annoncé.

43 Probabilité élémentaire. — On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{C}_n$,

$$(Q_1 = k_1, \ldots, Q_n = k_n) = \left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n - 1}\right).$$

C'est vrai pour $n = 1$ d'après la question **42** (ou par définition de Q_1). Soit $n \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie au rang $n - 1$. Soit $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{C}_n$. Alors

$$(Q_1 = k_1, \ldots, Q_n = k_n) = (Q_1 = k_1, \ldots, Q_{n-1} = k_{n-1}) \cap \left(\frac{1}{k_n} < X_n \leqslant \frac{1}{k_n - 1}\right).$$

Or, $X_n = U - \frac{1}{Q_1} - \cdots - \frac{1}{Q_{n-1}}$, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(Q_1 = k_1, \ldots, Q_n = k_n) &= (Q_1 = k_1, \ldots, Q_{n-1} = k_{n-1}) \\
&\quad \cap \left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n - 1}\right) \\
&\underset{\text{récurrence}}{=} \left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-2}} + \frac{1}{k_{n-1} - 1}\right) \\
&\quad \cap \left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n - 1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n - 1}\right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'inclusion du second intervalle dans le premier : comme $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{C}_n$, on a $k_n - 1 \geqslant k_{n-1}(k_{n-1} - 1)$, donc $\frac{1}{k_n - 1} \leqslant \frac{1}{k_{n-1}(k_{n-1} - 1)} = \frac{1}{k_{n-1} - 1} - \frac{1}{k_{n-1}}$, ce qui donne $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n - 1} \leqslant \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-2}} + \frac{1}{k_{n-1} - 1}$, tandis que l'inégalité entre les bornes inférieures est évidente ; d'où le résultat. Par conséquent, on a bien :

$$\mathbb{P}(Q_1 = k_1, \ldots, Q_n = k_n) = \frac{1}{k_n - 1} - \frac{1}{k_n} = \frac{1}{k_n(k_n - 1)}.$$

44 Calcul de $\mathbf{P}(Q_n = k | Q_{n-1} = j)$. — Pour $n = 2$, les questions **42** et **43** donnent immédiatement :

$$\mathbf{P}(Q_2 = k | Q_1 = j) = \frac{\mathbf{P}(Q_1 = j, Q_2 = k)}{\mathbf{P}(Q_1 = j)} = \frac{j(j-1)}{k(k-1)}.$$

Fixons désormais un entier $n > 2$. Comme $j \geqslant s_{n-1}$, on en déduit déjà que

$$\mathbf{P}(Q_{n-1} = j) \geqslant \mathbf{P}(Q_1 = s_1, \cdots, Q_{n-2} = s_{n-2}, Q_{n-1} = j) > 0.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$A_j = \{\bar{p} = (p_1, \cdots, p_{n-2}) \in \mathscr{C}_{n-2}\ ; p_{n-2}(p_{n-2}-1)+1 \leqslant j\}.$$

On peut écrire, pour tout $\bar{p} \in A_j$:

$$\mathbf{P}\big(Q_1 = p_1, \cdots, Q_{n-2} = p_{n-2}, Q_{n-1} = j, Q_n = k\big)$$

$$= \frac{j(j-1)}{k(k-1)} \mathbf{P}\big(Q_1 = p_1, \cdots, Q_{n-2} = p_{n-2}, Q_{n-1} = j\big).$$

On en déduit par sommation pour $\bar{p} \in A_j$:

$$\mathbf{P}\big(Q_n = k, Q_{n-1} = j\big) = \frac{j(j-1)}{k(k-1)} \mathbf{P}\big(Q_{n-1} = j\big),$$

et le résultat souhaité, puisque $\mathbf{P}\big(Q_{n-1} = j\big) > 0$.

45.(a) **Relation souhaitée.** — $\big(Q_{n-1} = j\big)_{j \geqslant s_{n-1}}$ constitue un système complet d'événements non négligeables, d'où par la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P_n(k) = \mathbf{P}\big(Q_n = k\big) = \sum_{\substack{j(j-1)+1 \leqslant k \\ j \geqslant s_{n-1}}} \mathbf{P}\big(Q_n = k | Q_{n-1} = j\big) P_{n-1}(j) = \sum_{\substack{j(j-1)+1 \leqslant k \\ j \geqslant 2}} \frac{j(j-1)}{k(k-1)} P_{n-1}(j).$$

45.(b) **Inégalité souhaitée.** — On a successivement :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_n(k)}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\substack{j \geqslant 2 \\ j(j-1)+1 \leqslant k}} \underbrace{\frac{j(j-1)}{k^2(k-1)} P_{n-1}(j)}_{a_{j,k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} a_{j,k},$$

où l'on a posé, pour $j \geqslant 2, k \geqslant 2$:

$$a_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{j(j-1)}{k^2(k-1)} P_{n-1}(j) & \text{si } \ j(j-1)+1 \leqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille $\big(a_{j,k}\big)_{j \geqslant 2, k \geqslant 2}$ étant à termes positifs, le théorème de Tonelli autorise donc l'interversion des sommes dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_n(k)}{k} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=j(j-1)+1}^{\infty} \frac{j(j-1)}{k^2(k-1)} P_{n-1}(j) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j P_{n-1}(j),$$

où l'on a posé, pour tout $j \geqslant 2$: $a_j = \displaystyle\sum_{k=j(j-1)+1}^{\infty} \frac{j(j-1)}{k^2(k-1)}$.

On peut écrire successivement :

$$\sum_{k=j(j-1)+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \sum_{k=j(j-1)+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{j(j-1)} - \sum_{k=j(j-1)+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{j(j-1)} - \int_{j(j-1)+1}^{\infty} \frac{dt}{t^2},$$

ce qui assure que : $a_j \leqslant \dfrac{1}{j(j-1)+1}$ et par suite :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_n(k)}{k} \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_{n-1}(j)}{j(j-1)+1}.$$

45.(c) **Autre estimation.** — On peut écrire successivement, pour tout $j \geqslant 2$:

$$\frac{j}{j(j-1)+1} \leqslant \frac{2}{3} \iff 3j \leqslant 2(j(j-1)+1) \iff 0 \leqslant (2j-1)(j-2),$$

ce qui est vérifié. Il en découle :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_n(k)}{k} \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_{n-1}(j)}{j(j-1)+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j(j-1)+1} \frac{P_{n-1}(j)}{j} \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{P_{n-1}(j)}{j},$$

et donc :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_n(k)}{k} \leqslant \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_{n-1}(k)}{k} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_1(k)}{k}.$$

Comme, on a :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_1(k)}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3},$$

il vient, le résultat souhaité.

46 Existence des fonctions proposées. — La première famille est constituée de fonctions caractéristiques, donc définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^{it \ln \frac{k}{n^2}} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \right| = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \underset{k \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

ce qui assure la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions proposée et l'existence de ψ_n.

47 Relation souhaitée. — On se fixe un entier $n \geqslant 2$ et un réel t.
On pose pour $\bar{k} = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathcal{C}_n$, l'événement $C_{\bar{k}} = \big(Q_1 = k_1, \cdots, Q_n = k_n\big)$.

La famille $\big(C_{\bar{k}}\big)_{\bar{k} \in \mathcal{C}_n}$ constitue un système complet d'événements et la variable aléatoire $e^{it \ln\left(\frac{Q_n}{Q_1 \cdots Q_{n-1}}\right)}$ étant intégrable, on obtient par la formule de transfert la relation :

$$\phi_n(t) = \sum_{\bar{k} \in \mathcal{C}_n} \mathbb{P}(C_{\bar{k}}) e^{it \ln \frac{k_n}{k_1 k_2 \cdots k_{n-1}}}.$$

La famille $\left(\mathbb{P}(C_{\bar{k}}) e^{it \ln \frac{k_n}{k_1 k_2 \cdots k_{n-1}}}\right)_{\bar{k} \in \mathcal{C}_n}$ étant sommable, le théorème de sommation par paquets donne

successivement :

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \sum_{\bar{k}\in\mathcal{C}_n} \mathbb{P}(C_{\bar{k}}) e^{it\ln\frac{k_n}{k_1k_2\cdots k_{n-1}}} \\
&= \sum_{(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathcal{C}_{n-1}} \ \sum_{k_n\geqslant k_{n-1}^2-k_{n-1}+1} \frac{1}{k_n(k_n-1)} e^{it\ln\frac{k_n}{k_1k_2\cdots k_{n-1}}} \\
&= \sum_{(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathcal{C}_{n-1}} \ \sum_{k_n\geqslant k_{n-1}^2-k_{n-1}+1} \frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)} e^{it\ln\frac{k_n}{k_{n-1}^2}} \frac{k_{n-1}(k_{n-1}-1)}{k_n(k_n-1)} \\
&= \sum_{(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathcal{C}_{n-1}} \frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)} \sum_{k_n\geqslant k_{n-1}^2-k_{n-1}+1} e^{it\ln\frac{k_n}{k_{n-1}^2}} \frac{k_{n-1}(k_{n-1}-1)}{k_n(k_n-1)} \\
&= \sum_{(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathcal{C}_{n-1}} \frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)} \ \psi_{k_{n-1}}(t).
\end{aligned}$$

48.(a) **Existence de C.** — Pour tout entier $n\geqslant 2$ et tout réel t, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\psi_n(t)-\psi(t) &= \sum_{k=n(n-1)+1}^{\infty} e^{it\ln\frac{k}{n^2}} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{it\ln x}}{x^2}\,dx \\
&= \underbrace{\sum_{k=n(n-1)+1}^{n^2} e^{it\ln\frac{k}{n^2}} \frac{n(n-1)}{k(k-1)}}_{a_n} - \underbrace{\sum_{k=n^2+1}^{\infty} e^{it\ln\frac{k}{n^2}} \frac{n}{k(k-1)}}_{b_n} \\
&\quad + \sum_{k=n^2+1}^{\infty} e^{it\ln\frac{k}{n^2}} \frac{n^2}{k(k-1)} - \sum_{k=n^2+1}^{\infty} \int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}} \frac{e^{it\ln x}}{x^2}\,dx \\
&= a_n - b_n + \sum_{k=n^2+1}^{\infty} \int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}} \frac{e^{it\ln\frac{k}{n^2}} - e^{it\ln x}}{x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

On a successivement : $|a_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n(n-1)+1}^{n^2} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$ et $|b_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n^2+1}^{\infty} \frac{n}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$.

En outre, on a pour $k\geqslant n^2+1$: $\left(\forall\, x\in\left[\frac{k-1}{n^2},\frac{k}{n^2}\right]\right)$,

$$\begin{aligned}
|e^{it\ln\frac{k}{n^2}} - e^{it\ln x}| = |e^{it\ln\frac{k}{n^2x}} - 1| &\leqslant |t| \ln\frac{k}{n^2x} \\
&\leqslant |t|\left(\frac{k}{n^2x}-1\right) \leqslant \frac{|t|}{n^2x},
\end{aligned}$$

d'où on en déduit :

$$\left|\int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}} \frac{e^{it\ln\frac{k}{n^2}} - e^{it\ln x}}{x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{|t|}{n^2}\int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}} \frac{dx}{x^3},$$

et par suite :

$$\left|\sum_{k=n^2+1}^{\infty}\int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}}\frac{e^{it\ln\frac{k}{n^2}}-e^{it\ln x}}{x^2}\,dx\right|\leqslant\sum_{k=n^2+1}^{\infty}\left|\int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}}\frac{e^{it\ln\frac{k}{n^2}}-e^{it\ln x}}{x^2}\,dx\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=n^2+1}^{\infty}\frac{|t|}{n^2}\int_{\frac{k-1}{n^2}}^{\frac{k}{n^2}}\frac{dx}{x^3}=\frac{|t|}{2n^2}.$$

En récapitulant, il vient : $|\psi_n(t)-\psi(t)|\leqslant|a_n|+|b_n|+\dfrac{|t|}{2n^2}\leqslant\dfrac{2}{n}+\dfrac{|t|}{2n^2}$, d'où l'existence du réel $C>0$.

48.(b) **Relation demandée.** — On se fixe un entier $n\geqslant 2$.
En convenant que : $k_1k_2\cdots k_{n-2}=1$, pour $n=2$, on peut écrire que :

$$\phi_n(t)=\sum_{\bar{k}=(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathscr{C}_{n-1}}\frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)}\;\psi_{k_{n-1}}(t)\cdot$$

Par ailleurs, avec des notations analogues aux précédentes, on a par la formule de transfert :

$$(\forall\,t\in\mathbb{R}),\;\phi_{n-1}(t)=\sum_{\bar{k}\in\mathscr{C}_{n-1}}\mathbf{P}(C_{\bar{k}})e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}=\sum_{\bar{k}\in\mathscr{C}_{n-1}}\frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)}\cdot$$

Il en résulte :

$$(\forall\,t\in\mathbb{R}),\;\phi_n(t)-\psi(t)\phi_{n-1}(t)=\sum_{\bar{k}\in\mathscr{C}_{n-1}}\frac{e^{it\ln\frac{k_{n-1}}{k_1k_2\cdots k_{n-2}}}}{k_{n-1}(k_{n-1}-1)}\left(\psi_{k_{n-1}}(t)-\psi(t)\right),$$

et par suite :

$$\begin{aligned}(\forall\,t\in\mathbb{R}),\;|\phi_n(t)-\psi(t)\phi_{n-1}(t)|&\leqslant\sum_{\bar{k}=(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathscr{C}_{n-1}}\mathbf{P}(C_{\bar{k}})\left|\psi_{k_{n-1}}(t)-\psi(t)\right|\\&\leqslant C\big(1+|t|\big)\sum_{\bar{k}=(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\mathscr{C}_{n-1}}\frac{\mathbf{P}(C_{\bar{k}})}{k_{n-1}}\cdot\\&=C\big(1+|t|\big)\;\mathbf{E}\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\right)\\&=C\big(1+|t|\big)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{n-1}(k)}{k}\\&\leqslant C\big(1+|t|\big)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

d'où on en déduit : $|\phi_n(t)-\psi(t)\phi_{n-1}(t)|\leqslant C\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1+|t|)$.

48.(c) **Dernière inégalité.** — On peut écrire, pour $n > m \geqslant 1$: $(\forall\, t \in \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\phi_n(t) - \psi^{n-m}(t)\phi_m(t)| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \left(\psi^{n-k}(t)\phi_k(t) - \psi^{n-(k-1)}(t)\phi_{k-1}(t)\right) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left| \psi^{n-k}(t)\phi_k(t) - \psi^{n-(k-1)}(t)\phi_{k-1}(t) \right| \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |\phi_k(t) - \psi(t)\phi_{k-1}(t)| \, \underbrace{|\psi^{n-k}(t)|}_{\leqslant 1} \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} C(1+|t|)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},
\end{aligned}$$

ce qui assure : $|\phi_n(t) - \psi^{n-m}(t)\phi_m(t)| \leqslant C(1+|t|) \displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 3C(1+|t|)\left(\frac{2}{3}\right)^{m}$.

48.(d) **Limite recherchée.** — On se donne $t \in \mathbb{R}$. Pour $n > m \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leqslant \left| \phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} - \psi^{n-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} \phi_m\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \\
&\quad + \underbrace{\left| \psi^{n-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} \phi_m\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|}_{b_{m,n}} \\
&= \left| \phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \psi^{n-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \phi_m\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| + b_{m,n} \\
&\leqslant 3C\left(\frac{2}{3}\right)^{m}\left(1 + \frac{|t|}{\sqrt{n}}\right) + b_{m,n}.
\end{aligned}$$

Il a été vu que : $\psi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme la fonction caractéristique ϕ_m est continue en 0, on en déduit que : $b_{m,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |e^{-\frac{t^2}{2}}\psi(0)^{-m} - e^{-\frac{t^2}{2}}| = 0$, puis que :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant 3C\left(\frac{2}{3}\right)^{m},$$

pour tout entier m et donc : $\phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $(\forall\, t \in \mathbb{R})$.

48.(e) **Preuve du résultat.** — Si on introduit la v.a.r : $X_n = \dfrac{\ln \frac{Q_n}{Q_1 \cdots Q_{n-1}} - n}{\sqrt{n}}$, sa fonction caractéristique vérifie : $(\forall\, t \in \mathbb{R})$, $\mathbf{E}\left(e^{itX_n}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\ln\frac{Q_n}{Q_1\cdots Q_{n-1}}}\right) e^{-it\sqrt{n}} = \phi_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-it\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Le théorème de Lévy assure la convergence en loi de la suite de v.a.r $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui assure le résultat annoncé.

Partie VI : Un théorème de Ronald Graham

49.(a) $\mathbf{tr}\big(\boldsymbol{A_n^k}\big) = \mathbf{tr}\big(\boldsymbol{B_n^k}\big),\ \mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{k} \leqslant \boldsymbol{n}.$ — On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\big(A_{n+1}^k\big) &= \operatorname{tr}\big(A_n^k\big) + \operatorname{tr}\big((B_n + 2^{n+2}I_{2^n})^k\big) = \operatorname{tr}\big(A_n^k\big) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{(n+2)(k-i)}\operatorname{tr}\big(B_n^i\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(B_n^k\big) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{(n+2)(k-i)}\operatorname{tr}\big(A_n^i\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(B_n^k\big) + \operatorname{tr}\big((A_n + 2^{n+2}I_{2^n})^k\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(B_{n+1}^k\big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\big(A_{n+1}^{n+1}\big) &= \operatorname{tr}\big(A_n^{n+1}\big) + \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}2^{(n+2)(n+1-i)}\operatorname{tr}\big(B_n^i\big) + \operatorname{tr}\big(B_n^{n+1}\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(A_n^{n+1}\big) + \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}2^{(n+2)(n+1-i)}\operatorname{tr}\big(A_n^i\big) + \operatorname{tr}\big(B_n^{n+1}\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(B_{n+1}^{n+1}\big),\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$.

49.(b) **Exemple d'entiers demandé.** — On commence par établir que l'ensemble des entiers obtenu en réunissant les termes diagonaux de A_n et de B_n est constitué de 2^{n+1} entiers impairs distincts.
A cette fin, on va le démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ en rajoutant que ces termes sont à valeurs dans $[\![1, 2^{n+2} - 1]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Le résultat est vrai au rang 1. Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$.
L'ensemble des termes diagonaux de A_{n+1} est constitué des termes de A_n, qui sont impairs, distincts, à valeurs dans $[\![1, 2^{n+2} - 1]\!]$ et les termes diagonaux de : $B_n + 2^{n+2}I_{2^n}$ qui sont également impairs, distincts, à valeurs dans $[\![2^{n+2} + 1, 2^{n+3} - 1]\!]$. Ainsi A_{n+1} est constitué de termes diagonaux impairs distincts à valeurs dans $[\![1, 2^{n+3} - 1]\!]$. On a un résultat analogue pour B_{n+1}. Comme l'ensemble des termes diagonaux de A_n et de B_n sont disjoints à valeurs dans $[\![1, 2^{n+2} - 1]\!]$, on voit que l'ensemble des termes diagonaux de A_{n+1} et B_{n+1} sont disjoints. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Introduisons alors : $q = 2^p$, puis $a_1, \cdots, a_q$ et $a_{q+1}, \cdots, a_{2q}$, les termes diagonaux respectifs de A_p et B_p. Les égalités précédentes avec les traces se traduisent par : $a_1^k + \cdots + a_q^k = a_{q+1}^k + \cdots + a_{2q}^k$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, ce qui fournit le résultat.

49.(c) **Relation demandée.** — On a successivement :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}(X + a_i)^p &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_i^k X^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=1}^{q}\binom{p}{k}a_i^k X^{p-k}\\ &= \sum_{k=0}^{p}\left(\binom{p}{k}X^{p-k}\sum_{i=1}^{q}a_i^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p}\left(\binom{p}{k}X^{p-k}\sum_{i=1}^{q}a_{q+i}^k\right)\\ &= \sum_{i=1}^{q}(X + a_{q+i})^p,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

50.(a) **Choix de D.** — Soit $\varrho = \max_{1\leqslant k<l\leqslant 2q} |a_k - a_l|$ et choisissons un entier pair D tel que : $D > \varrho$. Considérons (k,i) et (l,j) dans $[\![1,2q]\!] \times [\![1,p]\!]$ tels que : $a_k + iD = a_l + jD$. Si on avait $i \neq j$, on aurait $|a_k - a_l| = |(i-j)D| \geqslant D > \varrho$, ce qui est impossible. On a donc : $i = j$, ce qui conduit à : $a_k = a_l$ puis $k = l$, puisque les entiers $a_1, \cdots, a_{2q}$ sont distincts.

50.(b) **Choix de ω_p.** — Remarquons que si $\big(P_i\big)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est une famille de $N > 1$ polynômes deux à deux distincts de $\mathbb{Z}[X]$, alors il existe un entier pair τ tel que $\big(P_i(\tau)\big)_{1\leqslant i\leqslant N}$ soit une famille de N entiers deux à deux distincts. En effet, introduisons le polynôme : $P = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} (P_i - P_j)$ de $\mathbb{Z}[X]$.
Si P s'annulait sur l'ensemble des entiers naturels pairs, il aurait une infinité de racines et donc serait nul. Comme $\mathbb{Z}[X]$ est intègre, cela conduirait à l'existence de $1 \leqslant i < j \leqslant N$ tel que $P_i = P_j$, qui est impossible. On peut alors trouver un entier pair τ tel que : $P(\tau) \neq 0$, et par suite $\big(P_i(\tau)\big)_{1\leqslant i\leqslant N}$ constitue une famille de N entiers deux à deux distincts.
La famille $\big(S_{\bar{k}}\big)_{\bar{k}\in[\![1,2q]\!]^p}$ est constituée de produits de puissances p-ièmes de polynômes unitaires de degré 1, avec des familles de facteurs deux à deux distinctes d'après **50**.(a) donc forme une famille de polynômes deux à deux distincts de $\mathbb{Z}[X]$. On peut alors trouver un entier naturel pair ω_p tel que : $\big(S_{\bar{k}}(\omega_p)\big)_{\bar{k}\in[\![1,2q]\!]^p}$ constitue une famille de $(2q)^p$ entiers distincts. Les hypothèses de parité sur les coefficients de $S_{\bar{k}}$ et son expression assurent que $S_{\bar{k}}(\omega_p)$ est la puissance p-ième d'un entier naturel impair, pour tout $\bar{k} \in [\![1,2q]\!]^p$, d'où le résultat annoncé.

50.(c) **Expression de π_p.** — La relation polynomiale :

$$(X+a_1)^p + \cdots + (X+a_q)^p = (X+a_{q+1})^p + \cdots + (X+a_{2q})^p,$$

conduit à : $M_{i,0}(X) = M_{i,1}(X)$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. On en déduit que π_p est indépendant du choix $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \in \{0,1\}^p$. Comme ces polynômes ont des coefficients qui sont des entiers naturels et que q est pair, des arguments de parité assurent que π_p est un entier naturel pair.

51 Existence de $\big(\mathcal{M}_i\big)_{1\leqslant i\leqslant 2^p}$. — Le membre de droite de l'égalité :

$$\pi_p = M_{1\varepsilon_1}(\omega_p) M_{2\varepsilon_2}(\omega_p) \cdots M_{p\varepsilon_p}(\omega_p), \quad \big(\forall\, (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \in \{0,1\}^p\big),$$

met en évidence 2^p produits, chacun somme de q^p termes de la famille : $\big(S_{\bar{k}}(\omega_p)\big)_{\bar{k}\in[\![1,2q]\!]^p}$, constituée de $(2q)^p$ puissance p-ième d'entiers naturels impairs distincts. En outre, pour des produits associés à deux éléments distincts de $\{0,1\}^p$, les ensembles des q^p termes qui interviennent dans la somme sont disjoints. On voit ainsi que l'on peut disposer de 2^p ensembles comme demandés.

52.(a) **Décomposition en base $b = 2^p$.** — On raisonne par récurrence sur $m \geqslant 0$. Le résultat est vrai pour $0 \leqslant m < 2^p$. Supposons le vrai pour tout entier strictement inférieur à m. Par division euclidienne, on peut trouver $m' < m$ et $0 \leqslant r_m < 2^p$ tel que : $m = 2^p m' + r_m$. L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe $r' \geqslant 0$ tel que : $m' = \sum_{k=0}^{r'} b'_k 2^{pk}$, où $0 \leqslant b'_k < 2^p$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant r'$. On en déduit que : $m = \sum_{k=0}^{r} b_k 2^{pk}$, pour le choix de $r = r'+1$, $b_0 = r_m$ et $b_{k+1} = b'_k$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant r'$.
Le résultat annoncé en découle.

52.(b) **Décomposition demandée de $m\pi_p$.** — On utilise la décomposition précédente. Comme

$m \geqslant 1$, l'ensemble $I_m = \{k \in [\![0, r]\!] \,;b_k > 0\}$ est non vide. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} m\pi_p &= \sum_{j\in I_m} b_j \pi_p 2^{jp} = \sum_{j\in I_m} \underbrace{(\pi_p + \cdots + \pi_p)}_{b_j \text{ fois}} 2^{jp} \\ &= \sum_{j\in I_m} \left(\sum_{k_1\in\mathcal{M}_1} k_1^p + \cdots + \sum_{k_{b_j}\in\mathcal{M}_{b_j}} k_{b_j}^p \right) 2^{jp} \\ &= \sum_{j\in I_m} \underbrace{\left(\sum_{k_1\in\mathcal{M}_1} (k_1 2^j)^p + \cdots + \sum_{k_{b_j}\in\mathcal{M}_{b_j}} (k_{b_j} 2^j)^p \right)}_{B_j} \\ &= \sum_{j\in I_m} B_j, \end{aligned}$$

où B_j est une somme de puissance p-ième d'entiers naturels distincts de 2-valuation valant j, pour tout $j \in I_m$. Le résultat annoncé en découle.

53 Le cas général. — Introduisons l'entier $r_n \in [\![0, \pi_p - 1]\!]$ tel que : $n \equiv r_n \pmod{\pi_p}$.
Si $r_n = 0$, on est ramené à la question précédente et le résultat est acquis.
Si $r_n \geqslant 1$, comme $n \geqslant \Theta_p$, il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n = m\pi_p + (\pi_p + 1)^p + (2\pi_p + 1)^p + \cdots + (r_n\pi_p + 1)^p.$$

Si $m = 0$, le résultat est clair. Sinon, dans la décomposition de $m\pi_p$ obtenue en **52**.(b), les entiers impairs éventuels sont les éléments k des ensembles $\mathcal{M}_i$ (ceux de 2-valuation nulle) ; comme $\pi_p = \sum_{k\in\mathcal{M}_i} k^p$, ils vérifient $k^p \leqslant \pi_p$, donc $k \leqslant \pi_p$. Les entiers $k\pi_p + 1$ du membre de droite sont impairs et strictement supérieurs à π_p, et les autres entiers de la décomposition de $m\pi_p$ sont pairs : tous ces entiers sont donc distincts, ce qui permet de réaliser une décomposition de n en somme de puissances p-ièmes d'entiers distincts et le résultat.

54 Existence de δ_p. — La technique d'encadrement à l'aide d'intégrale assure que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1} > (n+1)^p,$$

pour n assez grand, d'où le résultat annoncé.

55 Existence de Λ. — Si $x = 0$, il suffit de choisir un entier $K_p > (C_p + 1)!$ et de poser $\Lambda = R_p = 0$, ce qui donne immédiatement le résultat souhaité.
Supposons désormais $x > 0$. On a : $x \in \mathscr{U}_p$ donc il existe $\omega \in \mathscr{P}_{N_p}$ tel que : $x \in [\omega, \omega + \rho_p[$. Ainsi, il existe $x' \in [0, \rho_p[$ tel que : $x = \omega + x'$. Notons : $\omega = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$ où $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant N_p} \in \{0,1\}^{N_p}$.
La suite $\left(\frac{1}{(n+N_p)^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes substituables. Si $x' = 0$, prenons $\varepsilon_n = 0$ pour tout $n > N_p$. Sinon, introduisons la suite $(\varepsilon_n)_{n>N_p}$ définie par l'algorithme glouton de la question **35**, telle que : $x' = \sum_{n=N_p+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$.
Ainsi on a : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$, puis on peut écrire $x = \frac{a}{b}$, avec $a > 0$ et $b > 0$, et $a \wedge b = 1$. On sait que

$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne finit pas par stationner à 1. Donc il existe un entier $K_p > (C_p+1)!$ qui en plus peut être choisi tel que : $q = K_p - 1 \geqslant N_p + b$ et $\varepsilon_q = 0$. Un tel choix est licite : la condition imposée à K_p par l'énoncé (tout entier de $[\![\Theta_p, \Theta_p + (\delta_p C_p)^p]\!]$ est somme de puissances p-ièmes d'entiers distincts, chacun produit d'éléments distincts de $[\![1, K_p]\!]$) est conservée lorsque K_p augmente. On peut alors écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\varepsilon_k}{k^p} \leqslant \frac{a}{b} < \sum_{k=1}^{q} \frac{\varepsilon_k}{k^p} + \frac{1}{(K_p-1)^p}$, et donc :

$$0 \leqslant \frac{a}{b} - \sum_{k=1}^{K_p-1} \frac{\varepsilon_k}{k^p} < \frac{1}{(K_p-1)^p}.$$

Comme $b \leqslant q = K_p - 1$, l'entier b divise $(K_p-1)!$, si bien que le membre de gauche s'écrit comme une fraction de dénominateur $(K_p-1)!^p$: il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a}{b} - \sum_{k=1}^{K_p-1} \frac{\varepsilon_k}{k^p} = \frac{N_0}{(K_p-1)!^p} = \frac{K_p^p N_0}{\big(K_p!\big)^p} = \frac{R_p}{\big(K_p!\big)^p} \text{ où : } R_p = K_p^p N_0.$$

L'élément : $\Lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{K_p-1} \frac{\varepsilon_k}{k^p} \in \mathscr{P}_{K_p-1}$ convient alors.

56 Inégalités souhaitées. — Considérons un entier : $1 \leqslant j < Z$. On sait qu'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et des entiers : $i_1 < i_2 < \cdots < i_h$ dans $[\![C_p, K_p]\!]$ tels que : $m_j = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant h} i_k^p < \Delta_p$.
On a alors : $i_{h-t} \leqslant K_p - t$, pour tout entier $0 \leqslant t < h$. On va traiter deux cas :

• Il existe $0 \leqslant t < h$ tel que : $i_{h-t} < K_p - t$. Introduisons alors :

$$k = \min\{t \in [\![0, h-1]\!] \ ; \ i_{h-t} < K_p - t\}.$$

On peut écrire : $i_{h-t} = K_p - t$, pour tout entier $0 \leqslant t < k$ et : $i_{h-k} + 1 \leqslant K_p - k$; si $k \geqslant 1$, on a en outre $K_p - k < i_{h-k+1}$.
En posant $s = h - k$ et en remarquant que $1 \leqslant h \leqslant K_p - C_p$, on en déduit que :

$$m_j < \big(i_1 \times \cdots \times i_{s-1} \times (i_s + 1) \times i_{s+1} \times \cdots \times i_h\big)^p \leqslant \Delta_p.$$

Alors on peut écrire :

$$1 < \frac{m_{j+1}}{m_j} \leqslant \left(\frac{i_1 \times \cdots \times i_{s-1} \times (i_s+1) \times i_{s+1} \times \cdots \times i_h}{i_1 \times \cdots \times i_h}\right)^p = (1 + 1/i_s)^p \leqslant 2^p.$$

• $i_{h-t} = K_p - t$, pour tout entier $0 \leqslant t < h$. On a alors : $m_j = \displaystyle\prod_{0\leqslant t\leqslant h-1} (K_p - t)^p$, où : $h < K_p - C_p$, puisque $m_j < \Delta_p$. L'entier m_j est le produit de puissance p-ième de h entiers distincts de $[\![C_p, K_p]\!]$.
Introduisons l'ensemble $\mathscr{N}'$ des éléments de $\mathscr{N}$ qui sont produit de puissance p-ième de $h+1$ entiers distincts de $[\![C_p, K_p]\!]$ et qui sont inférieurs ou égaux à m_j. Remarquons que : $C_p(C_p+1) \leqslant (C_p+1)! < K_p$.
On en déduit que : $\omega_\Sigma = \displaystyle\prod_{1\leqslant t\leqslant h-1} (K_p - t)^p \times \big(C_p(C_p+1)\big)^p < m_j$ et par suite que $\omega_\Sigma \in \mathscr{N}'$.
On peut alors introduire l'entier : $\omega_{\mathscr{N}} = \max \mathscr{N}'$. Il existe : $r_1 < r_2 < \cdots < r_{h+1}$ dans $[\![C_p, K_p]\!]$ tels que : $\omega_{\mathscr{N}} = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant h+1} r_k^p$. Comme : $\omega_{\mathscr{N}} \leqslant m_j < \displaystyle\prod_{0\leqslant t\leqslant h} (K_p - t)^p$, on peut alors introduire comme dans le cas précédent l'entier :

$$k = \min\{t \in [\![0, h]\!] \ ; \ r_{h+1-t} < K_p - t\}.$$

En posant $s = h+1-k$, on a de même par définition de $\omega_{\mathscr{N}}$:

$$\omega_{\mathscr{N}} \leqslant m_j < \big(r_1 \times \cdots \times r_{s-1} \times (r_s+1) \times r_{s+1} \times \cdots \times r_{h+1}\big)^p \leqslant \Delta_p.$$

On en déduit :

$$1 < \frac{m_{j+1}}{m_j} \leqslant \left(\frac{r_1 \times \cdots \times r_{s-1} \times (r_s+1) \times r_{s+1} \times \cdots \times r_{h+1}}{r_1 \times \cdots \times r_{h+1}}\right)^p = (1+1/r_s)^p \leqslant 2^p.$$

Le résultat annoncé en découle.

57 $\mathcal{B}$ est non vide. — On peut écrire :

$$0 < \frac{R_p}{\big(K_p!\big)^p} < \frac{1}{(K_p-1)^p} < \frac{1}{\big((C_p+1)!-1\big)^p} \leqslant \frac{1}{\big(C_p!\big)^p},$$

d'où il vient, puisque K_p divise R_p :

$$\Theta_p < K_p \leqslant R_p \leqslant \frac{\big(K_p!\big)^p}{\big(C_p!\big)^p} = \Delta_p = m_Z.$$

On en déduit que : $0 \in \mathcal{B}$ du fait que : $0 \leqslant R_p - \Theta_p < m_Z$ (car $\Theta_p > 0$ et $R_p \leqslant m_Z$).

58.(a) $\boldsymbol{R_p \in [\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]}$. — On a déjà : $0 \leqslant R_p - \Theta_p$.
Raisonnons par l'absurde : supposons $\big(\delta_p C_p\big)^p = \delta_p^p m_1 < R_p - \Theta_p$. Comme $\delta_p > G$, aucun entier $k \in [\![\delta_p, C_p - 1]\!]$ n'appartient à $\mathcal{B}$: pour tout $i \in [\![1, Z]\!]$, l'inégalité $k^p m_i \leqslant R_p - \Theta_p$ entraîne donc $(k+1)^p m_i \leqslant R_p - \Theta_p$. De proche en proche, on obtient :

$$\delta_p^p m_1 < \big(\delta_p+1\big)^p m_1 < \cdots < \big(C_p-1\big)^p m_1 < C_p^p m_1 \leqslant R_p - \Theta_p.$$

Remarquons que : $\delta_p^p m_2 < C_p^p m_1 \leqslant R_p - \Theta_p$, du fait que : $\dfrac{m_2}{m_1} \leqslant 2^p < \left(\dfrac{C_p}{\delta_p}\right)^p$.
On en déduit de manière analogue :

$$\delta_p^p m_2 < \big(\delta_p+1\big)^p m_2 < \cdots < \big(C_p-1\big)^p m_2 < C_p^p m_2 \leqslant R_p - \Theta_p.$$

On obtient ainsi successivement : $\delta_p^p m_1 < \delta_p^p m_2 < \cdots < \delta_p^p m_Z < R_p - \Theta_p$, ce qui contredit l'inégalité : $R_p - \Theta_p \leqslant m_Z$. Ainsi, on en déduit : $R_p - \Theta_p \leqslant \big(\delta_p C_p\big)^p$ et que : $R_p \in [\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$.

58.(b) **Résultat annoncé.** — Par définition de l'intervalle $[\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$, il existe $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$, finie non vide, tel que : $R_p = \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}} s^p$, où chaque élément $s \in \mathcal{S}$ est produit d'éléments distincts de $[\![1, K_p]\!]$.

Il existe donc $\mathcal{S}' \subset \mathbb{N}^*$, finie non vide, tel que : $\dfrac{R_p}{\big(K_p!\big)^p} = \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{s^p}{\big(K_p!\big)^p} = \sum_{k \in \mathcal{S}'} \frac{1}{k^p}$.

On en déduit donc : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{K_p-1} \frac{\varepsilon_k}{k^p} + \sum_{k \in \mathcal{S}'} \frac{1}{k^p}$. Comme pour $k \in \mathcal{S}'$, on a : $\dfrac{1}{k^p} \leqslant \dfrac{R_p}{\big(K_p!\big)^p} < \dfrac{1}{(K_p-1)^p}$, il vient : $k \geqslant K_p$ et donc le résultat est acquis dans ce cas.

59.(a) **Existence de $\boldsymbol{k_0}$.** — Les hypothèses assurent par définition de δ_p que :

$$G^p m_{i_0} \leqslant R_p - \Theta_p < (G+1)^p m_{i_0} \leqslant (1^p + 2^p + \cdots + G^p) m_{i_0}.$$

Ainsi l'application $\varrho : i \mapsto \displaystyle\sum_{i \leqslant k \leqslant G} k^p m_{i_0}$ est définie sur $[\![1, G]\!]$ et vérifie : $\varrho(G) \leqslant R_p - \Theta_p < \varrho(1)$. On peut alors poser : $k_0 = \min\{k \in [\![1, G]\!] \,;\, \varrho(k) \leqslant R_p - \Theta_p\}$, d'où le résultat.

59.(b) **Inégalité souhaitée.** — On a par définition de $k_0 > 1$:

$$\big(k_0^p + (k_0+1)^p + \cdots + G^p\big)m_{i_0} \leqslant R_p - \Theta_p < \big((k_0-1)^p + k_0^p + \cdots + G^p\big)m_{i_0},$$

d'où en retranchant le membre de gauche, on en déduit l'inégalité annoncée.

60 Démonstration du théorème. — On reprend l'entier R_p défini à la question **55**.
On définit alors par récurrence la suite, dont le premier terme est : $\mathscr{D}_0 = R_p$.
Si $\mathscr{D}_0$ est nul ou est un élément de $[\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$, alors la suite s'achève et l'on a vu que : $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{P}_n$ dans ce cas. Sinon, on peut par le même processus que ci-dessus lui associer les entiers $G^{(0)} = G, i_0$ et k_0. On pose alors : $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0 - \big(k_0^p + (k_0+1)^p + \cdots + (G^{(0)})^p\big)m_{i_0}$.
On a : $\Theta_p \leqslant \mathscr{D}_1 < \mathscr{D}_0$ et on peut écrire que : $0 \leqslant \mathscr{D}_1 - \Theta_p < (k_0-1)^p m_{i_0}$. Cette inégalité fournit :

$$\mathscr{D}_1 < \Theta_p + (k_0-1)^p m_{i_0} < m_1 + (k_0-1)^p m_{i_0} \leqslant m_{i_0} + (k_0-1)^p m_{i_0} \leqslant k_0^p m_{i_0},$$

et donc $\mathscr{D}_1 < k_0^p m_{i_0}$.
Si $\mathscr{D}_1$ est un élément de $[\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$, la suite s'achève et l'on a : $\mathscr{D}_1 = \sum_{s\in\mathcal{S}} s^p$, avec des notations analogues à la question **58**.(b). On a alors : $R_p = \mathscr{D}_0 = \sum_{s\in\mathcal{S}} s^p + \sum_{k=k_0}^{G^{(0)}} k^p m_{i_0}$. Vérifions que le dernier membre a chacun de ses termes qui est distinct et qui est produit de puissance p-ième d'éléments distincts de $[\![1, K_p]\!]$. C'est déjà le cas de la première somme, puis l'on a : $(\forall\, s \in \mathcal{S}), s^p \leqslant \mathscr{D}_1 < k_0^p m_{i_0}$, ce qui assure que les supports des deux sommes sont disjoints.
Par ailleurs, il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et des entiers : $C_p \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_h \leqslant K_p$ tels que : $m_{i_0} = \prod_{1\leqslant k\leqslant h} j_k^p$.
Ainsi, pour tout : $k \in [\![k_0, G^{(0)}]\!]$, on a : $k \leqslant G^{(0)} < C_p$ et donc $k^p m_{i_0}$ est bien un produit de puissance p-ième d'éléments distincts de $[\![1, K_p]\!]$. On peut alors achever comme à la question **58**.(b) et conclure que : $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{P}_n$.
Si $\mathscr{D}_1$ n'est pas un élément de $[\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$, on applique le même processus que celui appliqué à $\mathscr{D}_0$: on dispose toujours de $\Theta_p \leqslant \mathscr{D}_1 \leqslant \Delta_p$, et les arguments des questions **57** à **59** restent valables. On introduit alors les entiers $G^{(1)}, i_1$, et k_1 comme on a introduit les entiers G, i_0 et k_0 précédents. On pose alors : $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_1 - \big(k_1^p + (k_1+1)^p + \cdots + (G^{(1)})^p\big)m_{i_1}$ qui vérifie : $\Theta_p \leqslant \mathscr{D}_2 < \mathscr{D}_1$.
On construit ainsi une suite strictement décroissante d'entiers naturels : $\big(\mathscr{D}_s\big)_{0\leqslant s\leqslant q}$, à laquelle, l'on peut associer des suites finies : $\big(G^{(j)}\big)_{0\leqslant j<q}, \big(i_j\big)_{0\leqslant j<q}$ et $\big(k_j\big)_{0\leqslant j<q}$ telles que : $(\forall\, s \in [\![0, q[\![)$,

$$\delta_p \leqslant G^{(s)} < C_p, \quad 1 \leqslant i_s \leqslant Z, \quad 1 \leqslant k_s \leqslant G^{(s)},$$

vérifiant les inégalités :

$$(G^{(s)})^p m_{i_s} \leqslant \mathscr{D}_s - \Theta_p < (G^{(s)}+1)^p m_{i_s} \quad \text{puis} \quad \sum_{k=k_s}^{G^{(s)}} k^p m_{i_s} \leqslant \mathscr{D}_s - \Theta_p < \sum_{k=k_s-1}^{G^{(s)}} k^p m_{i_s},$$

et où l'on a posé : $\mathscr{D}_{s+1} = \mathscr{D}_s - \sum_{k=k_s}^{G^{(s)}} k^p m_{i_s}$, pour tout $s \in [\![0, q[\![$. Les entiers $\mathscr{D}_s$ restent compris entre Θ_p et Δ_p. Tant que le cas terminal n'est pas atteint, l'étape suivante est définie et donne un entier strictement plus petit. Une suite strictement décroissante d'entiers minorés ne pouvant être infinie, le processus s'arrête à un rang q tel que $\mathscr{D}_q$ appartient à $[\![\Theta_p, \Theta_p + \big(\delta_p C_p\big)^p]\!]$.
On a alors la relation : $\mathscr{D}_0 = R_p = \mathscr{D}_q + \sum_{s=0}^{q-1} \Upsilon_s$, où : $\Upsilon_s = \sum_{k=k_s}^{G^{(s)}} k^p m_{i_s}$, pour tout entier $0 \leqslant s < q$.

Comme : $\mathscr{D}_q \in [\![\Theta_p, \Theta_p + (\delta_p C_p)^p]\!]$, on peut introduire une partie $\mathcal{S}''$ comme l'on a introduit la partie $\mathcal{S}$ à la question **58**.(b). Pour tout entier $1 \leqslant s < q$, on a :

$$(\forall\, k \in [\![k_{s-1}, G^{(s-1)}]\!]), (\forall\, t \in [\![k_s, G^{(s)}]\!]), \quad t^p m_{i_s} \leqslant \Upsilon_s = \mathscr{D}_s - \mathscr{D}_{s+1} < \mathscr{D}_s < k_{s-1}^p m_{i_{s-1}} \leqslant k^p m_{i_{s-1}},$$

et donc : $t^p m_{i_s} < k^p m_{i_{s-1}}$. On en déduit que les supports de chacune des sommes du membre de droite de l'égalité : $R_p = \sum_{s \in \mathcal{S}''} s^p + \sum_{s=0}^{q-1} \Upsilon_s$ sont disjoints. On peut alors achever comme à la question **58**.(b) et conclure que : $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{P}_n$.

61 Égalité souhaitée. — Ce qui précède assure que : $\mathcal{U}_p \cap \mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$.

Considérons $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$. On a bien sûr $x \in \mathbb{Q}$ et il existe $n > N_p$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k^p} = \omega + \sum_{k=N_p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k^p} < \omega + \rho_p, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \in [\omega, \omega + \rho_p[\subset \mathcal{U}_p.$$

Nous avons donc établi l'inclusion inverse d'où l'égalité énoncée.

62.(a) **Décomposition souhaitée.** — On a : $\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum_{k=2}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}$, donc il existe $r \geqslant 1$ tel que : $\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{m_k^2}$, où $1 < m_0 < m_1 < \cdots < m_r$ sont des entiers.

Si on avait $m_0 > 2$, on aurait : $\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{m_k^2} < \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}$. On en déduit que : $m_0 = 2$ et donc : $\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{m_k^2}$, ce qui assure que $r > 1$.

Note : Un petit programme donne :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{840^2}.$$

62.(b) **Résultat souhaité.** — Considérons un rationnel $x \in \left]0, \frac{\pi^2}{6} - 1\right[\cup \left]1, \frac{\pi^2}{6}\right[$. On sait qu'il existe des entiers $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_{r_1}$ où $r_1 \geqslant 1$ tels que : $x = \sum_{k=1}^{r_1} \frac{1}{n_k^2}$. Comme x est distinct de 1, on a $n_{r_1} \geqslant 2$.

Une méthode parmi d'autres ; traitons d'abord le cas $m = n_{r_1} > 2$.

On vérifie alors que : $0 < \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{\pi^2}{6} - 1$. Il en découle l'existence de $r_2 \geqslant 1$ tel que : $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} = \sum_{k=1}^{r_2} \frac{1}{m_k^2}$, où : $m+1 < m_1 < \cdots < m_{r_2}$ (chaque terme $\frac{1}{m_k^2}$ est en effet majoré par $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{(m+1)^2}$, donc $m_k > m+1$).

On a donc : $x = \sum_{k=1}^{r_1-1} \frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{(n_{r_1}+1)^2} + \sum_{k=1}^{r_2} \frac{1}{m_k^2}$ qui est une somme de $r_1 + r_2$ inverses de carrés d'entiers

naturels distincts. En réitérant le même raisonnement à partir de l'entier $m_{r_2} > 2$, on voit que l'on peut mener le processus indéfiniment, ce qui établit le résultat dans ce cas.

Si $n_{r_1} = 2$, on utilise $\dfrac{1}{n_{r_1}^2} = \dfrac{1}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{m_k^2}$, et comme $m_r > 2$, on est ramené au cas précédent, d'où le résultat annoncé.

Chapitre 3

Épreuves orales de leçons

3.1 Liste des leçons

La liste des leçons de la session 2026 est reconduite pour la session 2027.

Leçons Algèbre et Géométrie 2027

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

149 Déterminant. Exemples et applications.

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Leçons Analyse-Probabilités 2027

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples d'applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

3.2 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, la candidate ou le candidat tire au sort un couple de sujets et est libre de choisir, parmi les deux sujets proposés, celui qui lui semble le plus à même de mettre en valeur ses connaissances, sans avoir à justifier ou commenter son choix devant le jury.

Les candidates et candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures.

Durant tout ce temps, elles ou ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidates et candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée » est tout aussi importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels, ou envoyés par une préparation universitaire, peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidates et candidats dans chaque salle de préparation.

Les candidates et candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours.

Les casques de réduction de bruit ne sont pas autorisés, les candidates ou candidats qui désirent s'isoler des bruits peuvent apporter des bouchons d'oreille.

Le temps de préparation est décompté dès la prise de connaissance des sujets. À l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant

le temps nécessaire à cette reproduction, les candidates et candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées d'une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document et prendre en compte le fait qu'il va être photocopié : écrire suffisamment gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. La candidate ou le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils constatés :

— *le hors-sujet.* Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidates ou candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage » de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— *le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet.* Sans doute par une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidates ou candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress.* Une grande majorité des candidates et candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais consiste en un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances de la candidate ou du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Les membres du jury font leur possible pour mettre en confiance, respecter, et écouter la candidate ou le candidat, en stimulant le dialogue.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2026, l'objectif étant d'expliciter les attendus du jury. Ces commentaires proposent volontairement deux niveaux de lecture :

— le premier s'en tient strictement au programme officiel, et n'interdit pas d'obtenir sans le dépasser une très bonne note ;

— le second, réservé aux candidates et candidats suffisamment solides pour aborder avec maîtrise des thèmes plus ambitieux.

Le premier niveau correspond aux notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats. Le second propose des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin » ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc.). Le jury espère que candidates et candidats, ainsi que les préparateurs, sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent la candidate ou le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation ainsi que, bien entendu, la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

Lorsque la leçon s'y prête, le jury recommande très fortement qu'un des développements démontre l'un des résultats centraux ou un enchaînement de résultats centraux de la leçon. Les prérequis du développement doivent alors être clairement précisés.

3.2.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, la candidate ou le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette

présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications mettant en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par la candidate ou le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématiques. Le jury attend que la candidate ou le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidates et candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté pour l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés sont interdits depuis le concours 2023. Le jury invite les candidates et candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et à diversifier leurs lectures, afin de produire des plans synthétiques hiérarchisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidates et candidats qui ont le réflexe de faire un dessin, lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 pages autorisées, surtout avec des éléments que la candidate ou le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, la candidate ou le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidates et candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet à la candidate ou au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation

orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité de la candidate ou du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que la candidate ou le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidates et candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement la candidate ou le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

3.2.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que la candidate ou le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, la candidate ou le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'elle ou il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. La candidate ou le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'elle ou il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'elle ou il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires » en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par la candidate ou le candidat. La candidate ou le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande de bien gérer son tableau, en particulier la candidate ou le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend de la candidate ou du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidates et candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des

qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par la candidate ou le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'une future agrégée ou d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribue à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Le jury intervient le moins possible pendant le développement, mais il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre la candidate ou le candidat pour demander des explications. Cela n'augmente pas le temps prévu pour le développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. La candidate ou le candidat qui présenterait un développement non maîtrisé, manifestement mal compris ne serait pas avantagé.

Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidates et candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de John, la décomposition de Dunford, le théorème de Bernstein, le processus de Galton-Watson,...). Trop de candidates et candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidates et candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, la candidate ou le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel de montrer qu'on est capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'on vient d'exposer.

3.2.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par la candidate ou le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. La candidate ou le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidates ou candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles

sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec la candidate ou le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et la candidate ou le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont ses réactions qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable à la candidate ou au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury pose aussi, conformément à l'article 8 de l'arrêté du 28 décembre 2009 modifié fixant les sections et les modalités d'organisation des concours de l'agrégation, « les questions qu'il juge utiles lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République ». Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.

3.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est impératif de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Le matériel théorique en accord avec le programme doit être présenté, accompagné d'illustrations pertinentes. Il faut pouvoir dégager l'intérêt des notions introduites avec des exemples d'actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements,

notamment via la formule de Burnside. Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, représentations de groupes, etc.). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, groupes d'isométries, etc.). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un polygone régulier dans le plan ou d'un polyèdre régulier dans l'espace).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentées, avant d'aborder l'aspect « groupe » de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane, par exemple la constructibilité des polygones réguliers. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$.

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le cœur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans un premier temps, la notion de conjugaison dans un groupe introduite brièvement doit être développée et illustrée dans des situations variées. On doit proposer des situations où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler). On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g.

Ensuite, il est attendu de développer l'intérêt de la notion de sous-groupe distingué en particulier en regard de la structure de groupe obtenue par quotient d'un groupe, le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme de groupes, ainsi que la factorisation d'un morphisme de groupes au travers d'un tel quotient. Il est indispensable de proposer quelques résultats bien choisis mettant en évidence l'utilisation de ces notions : citons par exemple le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre et la caractérisation interne des produits directs. L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Comme indiqué dans le sujet, il est demandé de présenter des exemples pertinents utilisés pour obtenir des résultats significatifs. De tels exemples sont nombreux en théorie des groupes mais il est souhaitable d'en proposer dans d'autres domaines, comme en arithmétique, en géométrie et en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombre de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, etc.).

La notion de produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

Cette leçon est particulièrement vaste et il convient de faire des choix, qui devront pouvoir être justifiés.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de Lagrange est incontournable. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers.

Il est souhaitable de présenter des exemples de groupes finis particulièrement utiles comme les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$, en en maîtrisant les propriétés élémentaires (générateurs, classes de conjugaison, etc.) Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Des exemples de groupes finis issus de domaines autres que la théorie des groupes doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidates et candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Il est possible d'explorer des représentations de groupes, de donner des exemples de caractères, additifs ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de Gauss. Les candidates et candidats peuvent ensuite introduire la transformée de Fourier discrète, qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple) et savoir l'utiliser pour déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique et pour donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, liens avec le pivot de Gauss, sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).

Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières selon le corps de base, en particulier sa cardinalité lorsque le corps $\mathbf{K}$ est fini et les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La leçon doit être illustrée par des exemples de groupes très variés, dont il est indispensable de donner des parties génératrices. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués.

Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathfrak{A}_5$ par exemple). On peut, en utilisant des parties génératrices pertinentes, présenter le pivot de Gauss, le calcul de l'inverse ou du rang d'une matrice, le groupe des isométries d'un triangle équilatéral. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Il est également possible de parler du logarithme discret et de ses applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Il est attendu de construire rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis d'en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'Euler ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables. Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences.

Les applications sont très nombreuses. Les candidates et candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de Frobenius peuvent figurer dans la leçon.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, s'intéresser au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide.

121 Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. On attend une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, avec des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est recommandé de s'intéresser aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers

doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'Euclide, théorème de Gauss, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, équations de type $ax+by = d$, etc.). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois. Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ ou d'Eisenstein $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles, en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, par exemple $\mathbf{Z}[X]$ ou $\mathbf{K}[X, Y]$. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, la résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ ou le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peuvent être présentés en lien avec ce sujet.

123 Corps finis. Applications.

La construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Le calcul des degrés des extensions, le théorème de la base télescopique, les injections des divers $\mathbf{F}_q$ sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue.

Des applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont des pistes intéressantes. Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductibilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

Les extensions de degré fini, le théorème de la base télescopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. Il est souhaitable d'introduire la notion d'élément algébrique et d'extension algébrique en en donnant des exemples. Il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Il est possible de s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème des nombres et des corps de nombres utilisés en algèbre ou en géométrie. L'objectif n'est pas d'en présenter le plus pos-

sible, mais plutôt d'en choisir certains, suffisamment variés, en en expliquant la genèse et en soulignant leur intérêt par des applications pertinentes. Les nombres décimaux, dyadiques, etc. fournissent des ensembles de nombres dont l'étude, si elle est accompagnée d'applications pertinentes, a sa place dans cette leçon. Les questions d'approximation diophantienne et leur lien avec les fractions continues, sans toutefois être un attendu de la leçon, entrent dans la suite logique de ce type de considération.
Le corps des nombres algébriques, ainsi que certains de ses sous-corps particuliers, comme celui formé par l'ensemble des nombres constructibles ou des sous-anneaux formés par certains ensembles d'entiers algébriques constituent des pistes d'étude. Les candidates et candidats qui maîtrisent ces notions pourront aussi s'aventurer du côté des nombres de Pisot.
La transcendance de π et celle de e sont des résultats à connaître, on pourra éventuellement en donner des applications, mais les démonstrations de ces résultats non triviaux ne sont pas exigibles. L'irrationalité de nombres remarquables ($\sqrt{2}$, nombre d'or, e, π) peut être abordée. Étudier les propriétés algébriques de certains ensembles de nombres (par exemple du type $\mathbf{Z}[\omega]$ où ω est un nombre algébrique) peut être une piste intéressante et mener à des applications en arithmétique.
L'utilisation des nombres complexes ou, pour aller plus loin, des quaternions, en géométrie ou en arithmétique constitue aussi une piste exploitable pour cette leçon.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les généralités sur les algèbres de polynômes à une variable sont supposées connues. Le bagage théorique permettant de définir corps de rupture et corps de décomposition doit être présenté. Ces notions doivent être illustrées dans différents types de corps (réels, rationnels, corps finis) ; les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et les polynômes minimaux de quelques nombres algébriques, par exemple les polynômes cyclotomiques. Le théorème de la base télescopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes sont incontournables. Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, on peut montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos, s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les PGCD et PPCM et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$, mais la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu. Il est possible d'en évaluer le nombre d'étapes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de Fibonacci.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de Bézout, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de rupture, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de l'algorithme d'Euclide étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc.). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'Euclide et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, examiner

l'éventuelle possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base. On peut aussi étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'Hermite et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de Smith, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude. La leçon invite aussi, pour des candidates et candidats maîtrisant ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X,Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de Sylvester. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de Padé-Hermite à l'aide de l'algorithme d'Euclide, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre coefficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il est pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de d'Alembert-Gauss. On peut faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de Descartes et de Sturm. L'étude des propriétés des nombres algébriques a sa place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par

extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur **R** ou **C**). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extréma liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

149 Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur **Z**. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, en particulier en connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques.

On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.

Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouve tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutant entre eux.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni des familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien avec le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^\intercal A$.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Les généralités sur les espaces euclidiens et affines sont supposées connues. La leçon reste contenue dans le cadre des espaces de dimension finie.

La notion de distance est abordée dans le cadre de la norme euclidienne : les projections orthogonales doivent être mentionnées. Les déterminants de Gram et des inégalités du type des inégalités d'Hadamard ont toute leur place dans cette leçon.
La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.
Il faut savoir justifier qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines. Les groupes de similitudes peuvent également être abordés.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquences théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Il est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P,A)\mapsto PA$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompositions LU et de Cholesky, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajout de la classification sur $\mathbf{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p,q), notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $\mathrm{O}(p,q)$.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Sylvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple ; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliquée. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de

même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$. La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Dans cette leçon, la notion de convexité doit être abordée d'un point de vue géométrique : les barycentres sont incontournables, et on doit, à ce titre, pouvoir utiliser la notion de coordonnées barycentriques. Les exemples géométriques sont importants et on espère que les notions introduites soient illustrées par des figures.
Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de Gauss-Lucas trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.
L'étude de certains ensembles convexes de matrices et de leurs propriétés rentre tout à fait dans le cadre de la leçon : on peut penser au cône des matrices symétriques (définies) positives, sur lequel le déterminant est log-convexe.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent présenter le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Carathéodory, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möbius ou de la formule de Burnside. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidates et candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidates et candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisis. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

— en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
— ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
— ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

— les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous-réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc.), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...
— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).
— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
— certaines candidates et certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bézout et des méthodes exploitant la notion de résultant.

— un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier, la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de Riemann.

— les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de Wantzel, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation de Delaunay, les diagrammes de Voronoï...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certaines candidates et certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidates et candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

3.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications. Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.

Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.

Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.

Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

203 Utilisation de la notion de compacité. Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.

Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.

Sur le second, on peut explorer quelques-unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations

dans L^p, etc.), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 Connexité. Exemples d'applications. Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace « d'un seul tenant », que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.

La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).

En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...

Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 Espaces complets. Exemples et applications. L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.

Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.

Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.

Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse. Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.

En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à

d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...

Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie des algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications. Le programme offre aux candidates et candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon d'applications significatives : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on peut également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues ou plus régulières à support compact.

Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, avec le théorème de Fejér (dans ses versions $L^p(\mathbf{T})$ ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications, par exemple à la construction de bases hilbertiennes d'exponentielles complexes dans $L^2(\mathbf{T})$ et ses conséquences.

Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidates et candidats solides : le théorème de Runge en analyse complexe, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétés algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises.

L'analyse de Fourier, sur le cercle ou la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de cette leçon. Le jury a noté que la théorie L^2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée.

Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est souvent présenté en développement, mais la démonstration du résultat et la façon d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$ ne sont pas parfaitement comprises.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit.

Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont attendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc.), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard,

ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Des exemples significatifs en dimension 2 et 3 pourront venir illustrer la différence fondamentale avec la dimension 1. Les dérivées partielles — lorsqu'elles existent — pourront clarifier l'expression de nombreuses différentielles ainsi que la règle de la chaîne.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la notion de différentielle seconde pour les fonctions de classe C^2, à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local, aux fonctions harmoniques et à leurs propriétés élémentaires, à la caractérisation des fonctions holomorphes et son interprétation géométrique.

Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le cœur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O).

Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n-ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.

Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc.).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

La théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire est le fondement de cette leçon, et comporte plusieurs points importants : passage du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'éviter cependant de consacrer une trop large portion du plan à des théorèmes généraux.

Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées.

Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, par exemple l'étude qualitative de systèmes autonomes plans.

Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à faire des dessins (portrait de phase par exemple) et à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : symétries, champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières.

Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser au problème de linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre ou au théorème de Poincaré-Bendixson.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220.

Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.

Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.

D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des rationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de

systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de $+\infty$, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.

Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentés.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.

En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée.

En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au-delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et caractère analytique, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une

dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.).

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins.

La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante.

Au-delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thématique riche d'exemples.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

230 Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, les définitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des « règles » de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.

Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.

L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables. Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$, voire à d'autres mesures.

Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé.

Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2, la dualité entre L^p ($1 \leqslant p < \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1, l'étude des parties compactes de L^p, etc.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse. L'intitulé de cette leçon de synthèse doit permettre d'aborder explicitement des problèmes variés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances ou d'autres opérations.

Les candidates et candidats peuvent également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité (voire, pour les candidates et candidats solides, utilisant le théorème de Baire).

La présentation des thématiques abordées doit être ordonnée rationnellement et illustrée systématiquement d'exemples significatifs.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L^1 ou L^2.

Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.).

Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d'intégrale (à titre purement indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements.

Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphie sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs.

Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions « spéciales » définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.

Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.

Les candidates et candidats peuvent aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Il est préférable, dans ce cas, de présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales — comme la fonction θ de Jacobi —, la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.

Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.

Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement par des candidates et candidats qui pensent qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.

Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux.

Les candidates et candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les théorèmes de convergence des séries de Fourier ont une place centrale dans cette leçon ; on prendra garde à différencier les hypothèses et à maîtriser les différents types de convergence (simple, uniforme, au sens de Cesáro, L^p...) apparaissant dans les énoncés proposés. Les propriétés importantes des noyaux utilisés pour les preuves de ces résultats doivent être clairement explicitées.

La théorie L^2 permet un point de vue géométrique agréable de la théorie. Dans ce cadre, on aura en tête l'interprétation de l'identité de Parseval en termes d'isométrie.

Les propriétés des coefficients de Fourier sont un incontournable de la leçon, mais ne devront pas prendre une place prépondérante. Les candidates et candidats pourront aborder le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier, via le théorème de Riemann-Lebesgue et le lien entre dérivation et coefficients.

Il est important d'illustrer cette leçon de quelques-unes des innombrables applications des séries de Fourier, par exemple : calculs de sommes de séries, résolutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, au critère de Weyl, à l'inégalité isopérimétrique, à la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne pour $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat.

La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.

Proposer comme développement le théorème d'échantillonnage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilités, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.

Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion de convexité uniforme et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications. Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues.

Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications. Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Il s'agit d'une leçon de synthèse autour de l'indépendance, concept incontournable qui démarque la théorie des probabilités de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements et d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues.

Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois, en lien avec les fonctions génératrices et caractéristiques. Des thèmes pouvant également être abordés sont le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi forte des grands nombres, l'indépendance d'une suite de tribus, la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens ou le théorème de Cochran.

Chapitre 4

Épreuves orales de modélisation

4.1 Présentation des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, trois options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,

B. Calcul scientifique,

C. Algèbre et Calcul formel.

L'épreuve de modélisation est composée d'une première période de préparation de quatre heures et d'une seconde période d'interrogation d'une heure, elle-même subdivisée en trois parties : l'accueil du candidat, qui dure environ 2 minutes, un exposé de 35 minutes maximum et un échange avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie. Ces modalités s'appliqueront encore pour la session 2027. Les candidats commencent par tirer au sort un couple de textes. Ils ont accès aux deux textes durant leur préparation et sont libres de choisir celui qu'ils souhaitent étudier et présenter durant la période d'interrogation.

Cette épreuve permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, leur mise en perspective, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la réflexion, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative et de synthèse. L'aptitude des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, les exposés dynamiques et vivants sont particulièrement appréciés.

4.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte de cinq à six pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils peuvent consulter sur leur poste informatique dans la salle de préparation. Un exemplaire imprimé du texte choisi leur est fourni à la fin de la première heure de préparation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur la problématique étudiée ainsi qu'une conclusion. Les textes peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Les principaux attendus de l'épreuve sont rappelés dans un bandeau surmontant chaque texte.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Des textes qui ont été rendus publics sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques https://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury et de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte.

4.1.2 Période de préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse https://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables depuis le site https://agreg.org et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve. Durant la période de préparation, les candidats peuvent également utiliser leurs propres ouvrages, dans les mêmes conditions que pour les épreuves de leçons.

Il est instamment demandé aux candidats de ne pas écrire sur le texte imprimé qui leur est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, sur l'exploitation du tableau, sur l'utilisation de l'outil informatique et sur le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est également conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Ce dernier est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de l'exposé et non pendant le temps d'échange.

4.1.3 Période d'interrogation

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). La période d'interrogation dure une heure ; après un bref accueil, elle est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes maximum suivi d'échanges avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie.

Exposé. Les candidats doivent commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan,

le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Ainsi, le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, ce dernier pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur quelques minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats : l'exposé doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé : il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un passage du texte est pénalisé. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent » ...) est une attitude bien plus payante.

Échanges avec le jury. Jusqu'à la fin de l'heure d'interrogation, le jury revient sur certains éléments notés au tableau ou sur des propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un résultat énoncé par les candidats. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation ou les illustrations informatiques.

4.2 Recommandations du jury communes aux trois options

4.2.1 Organisation de l'exposé

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Il ne faut pas négliger la conclusion de l'exposé : cette étape finale est le moment opportun pour revenir sur les problématiques soulevées par le texte.

Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée. Utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors-sujet et est sévèrement sanctionné. De même, il est inutile de perdre du temps à recopier la totalité du texte au tableau : chaque membre du jury dispose d'un exemplaire du texte. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement, mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée satisfaisante et sera sanctionnée par le jury. De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des suggestions proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer traiter le texte de façon partielle mais substantielle et en profondeur, ce qui peut aboutir à une bonne note.

4.2.2 Contenu de l'exposé

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses correct. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les

plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

4.2.3 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. En particulier, le choix des jeux de paramètres d'entrée pour leurs codes doit être pertinent. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

4.3 Option A : Probabilités et statistiques

4.3.1 Généralités

Les textes proposés pour l'option A abordent des thèmes où les aspects de probabilité et de statistique se complètent, en proportion variable. Une préparation homogène sur l'ensemble du programme de l'option est donc attendue. En 2026, le jury note qu'un certain nombre de présentations montrent des lacunes importantes, notamment sur les processus de Poisson et les martingales.

4.3.2 Recommandations spécifiques

Toute étude mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, laquelle implique des choix d'outils et d'hypothèses mathématiques adaptés à l'étude. Le jury attend des candidates et candidats une discussion de cette modélisation, et de la pertinence de ces hypothèses. À titre d'exemple, il est ainsi apprécié de justifier la pertinence d'une hypothèse d'indépendance, du caractère markovien d'une suite de variables aléatoires ou encore du choix des lois de probabilité utilisées dans la modélisation. Naturellement, on appréciera que le candidat ou la candidate mène une réflexion critique constructive et argumentée sur les diverses hypothèses du texte et propose éventuellement des améliorations rendant le modèle plus réaliste. Cette discussion pourra reposer sur des illustrations informatiques ou des considérations mathématiques.

Voici maintenant quelques points d'attention au sujet du programme lié à l'option A :

— La **loi forte des grands nombres** et le **théorème central limite** (attention à la confusion entre variance et écart-type, notamment dans les simulations) sont des résultats indispensables, dont les hypothèses exactes doivent être connues, ainsi que les modes de convergence en jeu. Le jury note une bonne maîtrise de ces résultats en 2026.

— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Les définitions, caractérisations et les liens entre les différents modes de convergence (presque sûre, dans L^p, en probabilité, en loi) sont des questions fréquemment soulevées et auxquelles les candidates et candidats semblent mieux préparés ces dernières années.

— **Intervalles de confiance.** Cette notion, essentielle dans le cadre de l'estimation d'un paramètre, est de mieux en mieux maîtrisée lors des oraux, en particulier l'utilisation du lemme de Slutsky pour construire des intervalles de confiance asymptotiques grâce au théorème central limite. Toutefois, les questions liées à des modèles spécifiques (lois de Poisson, exponentielle, uniforme, de Bernoulli, etc.) révèlent fréquemment un manque de recul sur cette construction et des difficultés à l'adapter.

— **Estimateurs.** Le vocabulaire (convergence, biais, risque quadratique, etc.) doit être connu et utilisé pour comparer, avec pertinence, des estimateurs d'un même paramètre.

— **Chaînes de Markov.** Cette notion semble moins bien maîtrisée en 2026. Le programme inclut les propriétés de Markov *faible et forte* et la notion de temps d'arrêt, qui a pu poser problème cette année. Si les définitions associées aux chaînes de Markov (états récurrents, irréductibilité, apériodicité) sont relativement bien connues, le lien entre ces notions et l'existence, l'unicité ou la convergence vers une loi invariante reste flou.

— **Vecteurs gaussiens.** Cette notion inclut la définition des matrices de covariance, ainsi que la loi image d'un vecteur gaussien par une transformation affine $X \mapsto AX + B$. L'énoncé du théorème de Cochran est généralement su, mais son application concrète pose toujours des difficultés aux candidates et candidats.

— **Processus de Poisson.** Le jury constate des lacunes de plus en plus importantes sur cette notion, qui apparaît dans de nombreux modèles. Les propriétés de ce processus (loi des incréments, allure des trajectoires), ainsi que sa construction et sa simulation à partir de variables exponentielles, sont à connaître.

— **Tests statistiques.** Le jury a noté une plus grande aisance des candidates et candidats sur la mise en place des tests d'adéquation au programme (tests du χ^2 et de Kolmogorov-Smirnov). La notion de p-valeur n'est pas explicitement au programme mais, lorsque les candidats utilisent des routines logicielles qui renvoient une p-valeur à interpréter, celle-ci doit être bien comprise et non confondue avec les risques de première ou deuxième espèce. Trop de candidats cherchent à utiliser la p-valeur sans savoir la définir précisément ni la déterminer sur un exemple simple.

La mise en place d'un test statistique nécessite de préciser les hypothèses associées, la statistique de test et la région de rejet. Certains textes suggèrent l'utilisation d'un test basé sur une variable

aléatoire. Il est attendu du candidat ou de la candidate de préciser les éléments nécessaires à la mise en place du test lorsqu'il ou elle choisit de le présenter.

— **Martingales.** En 2026, il s'agit encore du point du programme le moins bien maîtrisé. Les notions élémentaires de filtration et d'espérance conditionnelle semblent souvent difficiles à définir, et les hypothèses associées aux quelques résultats du programme (convergence de martingales, théorèmes d'arrêt) sont méconnues. C'est d'autant plus dommageable qu'il s'agit de l'une des seules méthodes permettant de démontrer des résultats de convergence presque sûre vers une variable aléatoire.

4.3.3 Mise en œuvre informatique

Le jury tient à insister sur l'objectif d'illustration ou de visualisation associé aux simulations, qui ne doivent donc pas se limiter à la présentation d'une liste de nombres. Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour illustrer des résultats probabilistes ou statistiques avec pertinence sont nombreuses, nous ne pouvons pas espérer en dresser une liste exhaustive. Nous donnons ici quelques conseils et les exemples les plus importants.

— Tout tracé devrait être accompagné d'une **légende explicite** destinée au jury. Si c'est un graphe, il est bon d'indiquer ce que représentent les abscisses et les ordonnées.

— Savoir **illustrer une convergence en loi** est indispensable. Deux méthodes sont couramment utilisées : confronter graphiquement un histogramme construit à partir de réalisations indépendantes d'une variable X_n (pour n assez grand) à la densité de la loi limite ; ou bien tracer la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition limite. Une justification mathématique de la méthode choisie est attendue. Il est ainsi à noter que de trop nombreux candidats ne savent pas expliquer à quoi correspond l'histogramme, ni faire la différence entre un histogramme en fréquence ou en densité.

— Les candidats peuvent aussi prendre l'initiative de valider quantitativement une convergence en loi par des **tests statistiques** en se donnant un risque α (classiquement $\alpha = 0{,}05$), en définissant une statistique et une région de rejet permettant de conclure.

— Les chaînes de Markov se prêtent à plusieurs illustrations : **simulation de trajectoires et études de convergence**. La convergence presque sûre des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ et la convergence en loi de X_n vers une mesure stationnaire peuvent donner lieu à des illustrations informatiques de choix.

— Lors des tentatives d'illustration de **convergence presque sûre**, notamment pour la loi forte des grands nombres ou les chaînes de Markov, le jury observe fréquemment des courbes anormalement irrégulières. Il faut veiller à construire la trajectoire sans relancer la simulation à partir de zéro à chaque pas de temps.

Précisons que l'utilisation de routines logicielles préprogrammées (histogrammes, tests statistiques, etc.) ne dispense pas les candidats de savoir comment elles sont construites.

Le jury rappelle que certains textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé, appréciée par le jury. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment charger les données avec les logiciels *Python, Scilab, Octave* et *R*, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A. Le jury observe dans les prestations un usage prédominant de *Python*, suivi de *Scilab* et *R*.

Le jury termine en rappelant les recommandations générales pour l'épreuve de modélisation : une présentation de qualité ne peut se limiter à une paraphrase du texte, ni constituer un catalogue de résultats disparates piochés isolément. L'exposé doit s'articuler autour d'un plan adapté et apporter

des éléments supplémentaires. Lorsqu'un résultat est développé pendant l'exposé, il faut prendre le temps de le replacer dans le contexte du modèle étudié, que ce soit pour l'appliquer ou le critiquer.

4.4 Option B : Calcul scientifique

4.4.1 Généralités

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. De manière non exhaustive, le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure de :

— énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz et l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant et vérifiant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.

— décrire la méthode d'Euler explicite, en formaliser et en analyser les propriétés de convergence.

— décrire des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), expliquer la notion de conditionnement, proposer des méthodes de recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.

— analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas scalaire et vectoriel).

— construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ sur un segment et en expliquer les propriétés élémentaires.

— énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbf{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

— montrer une certaine familiarité avec l'utilisation des séries de Fourier (calculs et résultats de convergence classiques).

— décrire les méthodes de quadratures classiques et leurs premières propriétés.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés par les candidats est exigible. Ces derniers prendront par ailleurs soin de citer des énoncés adaptés à la problématique du texte qu'ils ont choisi plutôt que des résultats trop généraux ou des listes de mots-clefs sans rapport direct avec le texte.

4.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

— **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.

— **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution maximale du problème de Cauchy [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :

1. énoncer de façon précise un théorème de Cauchy-Lipschitz adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique, etc.) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
2. expliquer comment ce théorème s'applique dans le contexte présent, notamment en explicitant la fonction $(t, X) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbf{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $Y'(t) = f(t, Y(t))$, tout en prenant soin de distinguer la variable vectorielle X et la fonction $Y : t \mapsto Y(t)$.
3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas, ainsi que de formaliser et analyser leurs propriétés de convergence, comme de discuter les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Le jury note un effort pour énoncer des définitions claires qui distinguent l'approximation Y_n de l'évaluation $Y(t_n)$, et permettent de relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt. Néanmoins, de nombreux candidats se contentent ensuite de citer les notions de consistance, stabilité et convergence sans les définir rigoureusement, ni les mettre en lien avec les méthodes proposées pour illustrer le texte. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Équations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent par exemple *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de Cauchy, et d'utiliser une discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (Dirichlet, Neumann, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance et d'exponentielle de matrice, inverse d'une matrice, etc.) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser des hypothèses suffisantes pour :
1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité de cet extremum,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de Fourier.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique. Le lien entre la régularité d'une fonction périodique et le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier doit être connu.

4.4.3 Mise en œuvre informatique

Sans que cela soit nécessairement propre à l'option B, le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents.

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si ces routines sont clairement présentées et motivées. Par ailleurs, utiliser une routine de base (par exemple pour résoudre numériquement un système linéaire, pour calculer une valeur approchée d'une intégrale, ou pour déterminer des valeurs approchées d'une solution d'un problème de Cauchy) ne dispense pas les candidats de savoir décrire, mettre en œuvre et discuter les propriétés des méthodes de base du programme de l'option qui auraient pu être utilisées alternativement.

Les illustrations informatiques doivent être produites par des programmes écrits et présentés par le candidat. Ce dernier doit être capable d'expliquer la structure (boucles, tests, etc.) et la raison de l'utilisation des instructions (affectations, calculs, routines du langage, etc.) par exemple si le jury le questionne à ce sujet. Parmi les choix proposés, le langage `Python`, ou à défaut `Scilab`, est certainement le mieux adapté à l'esprit de l'épreuve d'option B. Une présentation `LibreOffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

4.5 Option C : Algèbre et calcul formel

4.5.1 Généralités

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreurs). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

4.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc.), le jury apprécie que les réflexions suivantes soient menées de façon autonome :

— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthode(s) ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats et de candidates se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé du cryptosystème RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de ce cryptosystème dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Par ailleurs, dans un contexte cryptographique, le jury souhaite voir disparaître l'utilisation abusive du terme « crypter » en lieu et place du terme « chiffrer ».

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

— **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que l'on ne peut pas négliger lorsque l'on présente le concours de l'agrégation. Il est malheureusement encore trop

rare de voir des analyses spontanées de complexité d'algorithme pendant un exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si certains points restent méconnus :

- si l'algorithme d'Euclide est bien connu, les relations de Bézout ne sont obtenues qu'en effectuant l'algorithme d'Euclide classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'Euclide *étendu* est explicitement au programme de l'option.
- pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dans lequel on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.

— **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidates et des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles et exigées. Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement, qu'un bon code correcteur a une grande dimension et une grande distance minimale par rapport à sa longueur.
Si les définitions de base (codes, distance de Hamming, distance minimale) sont souvent connues, une interprétation pratique est trop peu souvent donnée. Par exemple, le ratio k/n pour un code de dimension k dans $\mathbf{F}_q^n$ est trop peu interprété comme un rendement ou un taux d'information. Il faut savoir expliquer comment utiliser concrètement un code donné, ou en quoi il est pertinent vis-à-vis du modèle d'erreurs présenté dans le texte. Enfin, mentionnons que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats et des candidates sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différencier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel à $\mathbf{F}_p^n$ mais pas en tant qu'anneau.

— **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est boudée par les candidates et les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.

4.5.3 Mise en œuvre informatique

Le jury se réjouit de constater que les exposés utilisent presque toujours l'outil informatique. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

- les candidates et les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Nous avons constaté que l'invitation du jury à réfléchir sur le choix d'un logiciel adapté à l'épreuve a été prise en compte : nous incitons les futures candidates et les futurs candidats à continuer sur cette voie.
- le jury est parfois surpris de voir de longs et fastidieux calculs développés au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique aurait permis de gagner en temps et en clarté.
- certains textes présentent des algorithmes pour résoudre efficacement un problème donné. Il est important de ne pas se contenter de les tester pour une valeur d'entrée très petite, puisque cela apparaît alors peu pertinent vis-à-vis du texte. Nous encourageons les futures candidates et les futurs candidats à tester leurs algorithmes sur plusieurs entrées de taille différente.

Chapitre 5

La bibliothèque de l'agrégation

5.1 Liste des livres disponibles

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés. La liste sera mise à jour sur le site du jury avant les épreuves orales.

AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	Vuibert
AEBISCHER B.	L3 Géométrie – **1 ex.** –	Vuibert
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	Masson
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	Hachette
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Dunod
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	Éditions de l'X
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	Hachette
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	Cassini

AMIOT E.	Une introduction aux mathématiques de la musique – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **5 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **6 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	Dover
APPEL W.	Probabilités pour non probabilistes – **1 ex.** –	H&K
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **1 ex.** – — Tome II – **1 ex.** –	Ellipses
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **9 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **1 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **7 ex.** – — 2. Analyse – **6 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	Dunod

ARNAUDIÈS J.-M. LELONG-FERRAND J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **5 ex.** – — Tome 1 pour MP AA' : Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **7 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	Springer
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **5 ex.** –	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	Jacques Gabay
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	Belin
AVEZ A.	Calcul différentiel – **2 ex.** –	Masson
BAGES M. & AL.	MATHS MPSI-MP2I – **1 ex.** –	Dunod
BAILLY-MAITRE G.	Arithmétique et cryptologie – **1 ex.** –	Ellipses
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **2 ex.** –	Hermann

BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	Belin
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	Masson
BAUDET J.	Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques – **1 ex.** –	Vuibert
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agrégation – **4 ex.** –	H&K
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	Éditions de l'X
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	Dunod

BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **1 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **3 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	Armand Colin
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	Éditions de l'X
BERTHELIN F.	Équations différentielles – **3 ex.** –	Cassini
BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	Springer
BIASI J.	Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne – **1 ex.** –	Ellipses
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	Prentice Hall

BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	Oxford Science Publications
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	Wiley
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	Ellipses
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	Mathematical association of America
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	Ellipses
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algorithmique – **1 ex.** –	Ediscience
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	Masson
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	Springer
BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	Éditions de l'X
BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	Éditions de l'X
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire – **2 ex.** –	Ellipses
BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** –	Frédéric Chyzak

BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **2 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **4 ex.** –	Masson
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** –	Dunod
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **3 ex.** –	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	Armand Colin
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **4 ex.** –	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF

CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P.	Carnet de voyage en Analystan – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries — Tome 1 – **4 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries : Tome 2 – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
CALDERO P. **PERONNIER M.**	Carnet de voyage en Algébrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	Hermann
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP Sciences
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1971) – **1 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	Hermann
CASAMAYOU A. **et al.**	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	CreateSpace
CASAMAYOU A. **CHAUVIN P.** **CONNAN G.**	Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** –	Dunod

CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	Wiley-Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	Wiley-Interscience
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	Prentice Hall
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	Ellipses
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	Mir
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	Éditions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **5 ex.** –	Masson
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** –	Dunod
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **3 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	Cassini
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	Springer-Verlag
CHIRON D.	chemins d'analyse Tome 1 – **1 ex.** –	Eyrolles
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	Cassini

CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Éditions de l'X
COMBES F	Algèbre et géométrie – **1 ex.** –	Bréal
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini

COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley
COX D.A.	Galois Theory – **1 ex.** –	Wiley-Interscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry – **1 ex.** –	John Wiley
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **2 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	Masson
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	Vuibert
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	Ellipses
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
DEGRAVE	Précis de mathématiques. Probabilités, statistiques 2^{e} année – **1 ex.** –	Bréal
DEHEUVELS P.	L'intégrale – **4 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	Modulo

DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **5 ex.** –	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	Springer
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DESPRÉS B.	Lois de conservation eulériennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Cassini
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **2 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **5 ex.** –	Gauthier-Villars

DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	Gauthier-Villars
DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	Wiley
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	Vuibert
DUMAS L. .	Modélisation á l'oral de l'agrégation de calcul scientifique – **1 ex.** –	Ellipses
DUMMIT D.	Abstract Algebra – **1 ex.** –	Wiley
DUPONT G.	Probabilités et statistiques – **2 ex.** –	Dunod

DYM H. **McKEAN H.P.**	Fourier series and integrals – **1 ex.** –	Academic Press
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres – **2 ex.** –	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **2 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	Cassini
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Dunod
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	Calvage & Mounet

FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	Masson
FILBET F.	Analyse numérique – **2 ex.** –	Dunod
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions, Variables – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **8 ex.** –	Vuibert
FOISSY L. **NINET A.**	Algèbre et calcul formel – **2 ex.** –	Ellipses
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** –	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **7 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **3 ex.** –	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **4 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 4 – **1 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **2 ex.** –	Masson
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie : Recueil d'exercices corrigés – **1 ex.** –	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	Cassini
GALLOUET T. **HERBIN R.**	Mesure, Intégration, Probabilités – **3 ex.** –	Ellipses
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	Dunod
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **2 ex.** –	Olivier Garet
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	Ellipses
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** –	Cambridge
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	Ellipses

GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	Cassini
GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **2 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF

GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	ISTE
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre Probabilités – **3 ex.** – — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse – **5 ex.** –	ELLIPSES
GOZARD I.	Théorie de Galois – **2 ex.** –	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	HERMANN
GRENIER J.-P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** –	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra – **2 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	CEPADUES
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	OXFORD
GUIGNARD Q. **RANDE B.**	Les clés pour l'oral MP Mathématiques – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
GUININ D. **ZAUBONNET F.** **JOPPIN B.**	Cours et exercices résolus — Algèbre-Géométrie MPSI – **1 ex.** – — MP – **1 ex.** –	BRÉAL
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	WILEY
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	ELLIPSES

HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cujas
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	Oxford
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	Ellipses
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	Wiley-Interscience
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Éléments d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	Masson
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	Vuibert
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	Belin
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	Vuibert
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	Springer-Verlag

ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	PUF (Que sais-je ?)
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **2 ex.** –	Cassini
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	Ellipses
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	Cassini
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	Hermann
KETRANE H. **ELINEAU L.**	Épreuve orale d'exemples et d'exercices : Agrégation interne/CAERPA mathématiques – **2 ex.** –	Dunod
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	Addison-Wesley
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	Springer
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	Ellipses
KÖRNER T.W.	Exercises in Fourier analysis – **1 ex.** –	Cambridge

KÖRNER T.W.	Fourier analysis – **2 ex.** –	Cambridge
KOSTRIKIN A.	Introduction à l'algèbre – **1 ex.** –	MIR
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **2 ex.** –	Cassini
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	Cambridge
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	Dunod
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	InterEditions
LANG S.	Algebra – **5 ex.** –	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra – **3 ex.** –	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses

LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 2 : Dérivation – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **4 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 2 - Algèbre et géométrie – **5 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LELONG-FERRAND J.	exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	Dunod

LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	Armand Colin
LESSARD S.	Les rudiments du calcul stochastique – **1 ex.** –	Ellipses
LESSARD S.	Processus stochastiques – **1 ex.** –	Ellipses
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	Vuibert
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	Dunod
LIRET F. **MARTINAIS D.**	Algèbre 1 – **1 ex.** –	Dunod
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** –	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	Springer
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** –	Cassini
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	Masson
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **1 ex.** –	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	Hermann
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF

MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **3 ex.** –	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **1 ex.** –	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	De Boeck
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	Springer
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** –	Ellipses
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités – **7 ex.** –	IREM Université Paris Diderot

MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAUD X.	Statistique – **1 ex.** –	Belin
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes – **4 ex.** –	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre MPSI – **1 ex.** – — Algèbre MP – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **1 ex.** –	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	Masson

NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	Masson
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	Cambridge
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** –	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	Prentice hall
ORTIZ P.	Exercice d'Algèbre – **1 ex.** –	Ellipses
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **4 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	Cassini
PABION J.F.	Éléments d'analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipses
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	Springer
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **2 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	Ellipses

PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	Cassini
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT press
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	Ellipses
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	Springer-Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **1 ex.** –	Ellipses
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	Cambridge
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	Springer
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **1 ex.** –	Masson
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **3 ex.** –	Dunod

QUEFFÉLEC H. **QUEFFELEC M..**	Analyse complexe et applications – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agrégation – **5 ex.** –	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITZ P.**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	International Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	Dunod
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	Calvage Mounet
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	Wiley
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	Springer

RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** –	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	Springer
RISLER J.-J.. **BOYER P.**	Algèbre pour la licence 3 – **2 ex.** –	Dunod
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	Ellipses
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	Vuibert
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	Dunod
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	Cédic/Nathan
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	Springer-Verlag
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques algèbre et géométrie – **2 ex.** –	EDP Sciences
ROMBALDI J.-E.	Interpolation et approximation Analyse pour l'agrégation - Cours et exercices résolus – **1 ex.** –	Vuibert
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle – **2 ex.** –	EDP Sciences
ROMBALDI J.-E.	Éléments d'analyse réelle – **1 ex.** –	EDP Sciences
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **4 ex.** –	De Boeck Supérieur
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'Agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	EDP Sciences

ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	Springer-Verlag
ROUDIER H.	Algèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	Vuibert
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	Springer (Sumat)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **4 ex.** –	Cassini
ROUX J.	Systèmes dynamiques et méthodes de continuation : Applications en biologie et dynamique des populations – **1 ex.** –	Ellipses
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **2 ex.** –	Masson
RUDIN W.	Functional analysis – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis – **4 ex.** –	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	Cassini
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
SAKAROVITCH J.	Éléments de théorie des automates – **1 ex.** –	Vuibert
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF

SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	Ellipses
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel : Corps finis, systèmes polynomiaux - Applications – **1 ex.** –	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	Wiley
SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	Hermann
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	Springer
SERFATI M.	Maths Sup & Spé, Algèbre – **1 ex.** –	Belin
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	Dover

SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	Dunod
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	Oxford Univ. Press
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	Dunod
SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
SOROSINA E. **METIER P.**	Système D - Algèbre générale. – **1 ex.** –	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	Wadsworth & Brooks
STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	Chapman and Hall
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	Cassini
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	Calvage & Mounet

TAUVEL P.	Algèbre linéaire - Échappée décisive dans un territoire splendide – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **2 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **1 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	Dunod
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** –	SMF
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **3 ex.** –	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **1 ex.** –	PUF (Que sais-je ?)
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **2 ex.** –	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	Oxford Univ. Press
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	Masson
TOULOUSE PAUL S.	Thème de probabilité et statistiques – **1 ex.** –	Dunod
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	Vuibert

TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires – **1 ex.** –	IREM Pays de la Loire
TRUSS J.-K..	Foundations of mathematical analysis – **1 ex.** –	Oxford
ULMER F.	Théorie des groupes – **3 ex.** –	Ellipses
ULMER F.	anneaux, corps, résultant – **2 ex.** –	Ellipses
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	Masson
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	Masson
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	Dunod
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	Classiques Hachette
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	Vuibert
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	Cambridge

WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. Peters
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **3 ex.** –	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	Cassini
YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	Dover
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipses
YGER A. *et al.*	Mathématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	Pearson
YGER A. *et al.*	Intégration, espaces de Hilbert et analyse de Fourier – **1 ex.** –	Ellipses
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	Dover
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	Cassini

5.2 Bibliothèque numérique

Pour les épreuves de leçons, les candidates et candidats peuvent utiliser la bibliothèque du concours, dont la liste des ouvrages figure à la section précédente. Une bibliothèque numérique, introduite en 2021, est mise à leur disposition pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des ouvrages disponibles, actualisée en 2026, est la suivante.

— Grégoire Allaire : Analyse numérique et optimisation (Éditions de l'X)
— Gilles Bailly-Maître : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
— Philippe Barbe et Michel Ledoux : Probabilité (EDP Sciences)
— Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
— Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
— Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
— Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (HAL Inria)
— Richard Brent et Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
— Hervé Carrieu : Probabilité. Exercices corrigés (EDP Sciences)
— Alexandre Casamayou-Boucau, Pascal Chauvin et Guillaume Connan : Programmation en Python pour les mathématiques (Dunod, 2e édition)
— Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage (CreateSpace)
— Marie-Line Chabanol et Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
— Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt : Probabilités. Préparation à l'agrégation interne (Amazon Kindle Direct Publishing ; disponible sur HAL)
— Djalil Chafaï et Florent Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL, hal-01897577, version 3)
— Jean-Pierre Demailly : Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
— Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
— Laurent Di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
— Gilles Dowek : Les démonstrations et les algorithmes (Éditions de l'X)
— Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
— Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
— Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
— Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
— Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
— Thérèse Hardin et al. : Concepts et sémantique des langages de programmation 1. Constructions fonctionnelles et impératives avec OCaml, Python, C et C++ (ISTE)
— Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
— John Hubbard et Beverly West : Équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
— Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage & Mounet)
— Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage & Mounet)
— Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage & Mounet)
— Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. Tome 1 (Cassini, 2e édition)
— Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. Tome 2 (Cassini, 2e édition)
— Sylvain Perifel : Complexité algorithmique (Ellipses)

— Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
— François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
— Victor Shoup : A Computational Introduction to Number Theory and Algebra (Cambridge University Press)
— Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)