Latin : Virgile, *L'Enéide*, chant IV, Paris, Les Belles Lettres, Coll. Guillaume Budé.

★

RUSSE

1. Programme pour la première épreuve écrite
(composition en langue russe)

A. Oeuvres littéraires

M. Cvetaeva : *Teatr.* M. : « Iskusstvo », 1988.

N. Leskov : *Ledi Makbet Mcenskogo uezda ; Zapecatlennyj angel (in Povesti i rasskazy.* M. : « Hudorestvennja literatura », 1983).

A. Platonov : *Kotlovan.* M. : « Sovremennik », 1988.

I. Šcitc : *Dnevnik « velikogo pereloma » (mart 1928 — avgust 1931).* P. : YMCA Press, 1991.

A. Tolstoj : *Knjaz' Serebrjanyj.*

B. Question de civilisation

L'ascension de Staline et la formation de l'URSS stalinienne (1924-1934).

2. Programme pour l'épreuve écrite à option

Option A

Le programme comprend toutes les œuvres littéraires figurant au programme de la première épreuve écrite et, en outre, les œuvres suivantes :

G. Deržavin : *Anakreontičeskie pesni.* M. : « Nauka », 1986, p. 8-90.

A. Remizov : *Prud.*

Option B

Le programme comprend toutes les œuvres littéraires figurant au programme de la première épreuve écrite et, en outre, les œuvres suivantes :

a) Mitropolit Ilarion : *Slovo o zakone i blagodati* (in *Philologie russe. Textes d'étude.* Paris, 1961, p. 16-24).

b) Grigorij Kotošixin : *O Moskovskom gosudarstve v seredine XVII stoletija* (in *Pamjatniki literatury drevnej Rusi XVII v. Kniga vtoraja*, éd. L.A. Dmitriev et D.S. Lixačev. M., 1989, p. 252-285).

3. Programme de l'oral

Option A

Même programme que pour l'épreuve écrite à option.

Option B

Toutes les œuvres inscrites au programme de l'épreuve écrite à option ainsi que la question suivante : « L'ordre des mots en russe ».

★

MATHÉMATIQUES

Épreuves préparatoires (écrit)

I. Combinatoire et algorithmique

1. Vocabulaire ensembliste. Applications d'un ensemble dans un autre. Relations d'équivalence. Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Cardinalité d'un ensemble fini ou dénombrable. Coefficients binomiaux.

Relations d'ordre. Ordres totaux. Arbres.

2. Permutations d'un ensemble fini, décomposition en transpositions, en cycles. Signature. Groupes symétrique et alterné. Exemples d'algorithmes de tri.

3. Les résultats de ce paragraphe ne feront pas l'objet de l'essentiel d'un problème ou d'une leçon.

Calcul propositionnel. Satisfaction et validité. fonctions booléennes. Notion de dérivation. Notions d'algorithmique ; exemples d'étude de la complexité pour des algorithmes figurant au programme.

Langages : mots sur un alphabet fini, monoïdes libres. Notions sur les langages rationnels et les automates.

Notions élémentaires sur les structures de données et les méthodes de programmation.

II. Groupes

1. Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupes distingués, groupes-quotients, produit de groupes.

2. Groupes libres, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément dans un groupe. Exemples de groupes finis.

3. Groupes abéliens de type fini. Réseaux.

4. Groupes opérant sur un ensemble, stabilisateur d'un point, orbites, formule des classes. Classes de conjugaison.

III. Anneaux et corps

1. Anneaux unitaires, morphismes d'anneaux, sous-anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux-quotients. Produit d'anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Corps. Sous-corps premier, caractéristique. Corps des fractions d'un anneau commutatif intègre. Corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, groupe des racines n-ièmes de l'unité. Corps finis.

2. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments associés. Anneaux factoriels, anneaux principaux. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Théorème de Bezout. Algorithme d'Euclide.

3. Arithmétique élémentaire de $\mathbb{Z}$, bases de numération. Congruences. Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois.

IV. Polynômes et fractions rationnelles

1. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif intègre. Fonctions polynômes, racines, multiplicité.

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples (cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).

2. Divisibilité dans les anneaux de polynômes : algorithme d'Euclide dans K[X] quand K est un corps commutatif. Factorialité de A[X] quand A est un anneau factoriel.

3. Idéaux de K[X] (K corps commutatif), quotients associés. Éléments algébriques, corps de rupture.

4. Polynômes symétriques, relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique. Notions sur l'élimination.

5. Algèbre A[[X]] des séries formelles à une indéterminée sur un anneau commutatif intègre

A. Applications en combinatoire : séries génératrices.

V. Algèbre linéaire sur un corps commutatif

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produits d'espaces vectoriels, espace K^n. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire, espaces-quotients. Sommes de sous-espaces, sommes directes, supplémentaires. Familles libres, génératrices, bases. Algèbre L(E) des endomorphismes d'un espace vectoriel E ; groupe linéaire GL(E).

2. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases, de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système d'équations linéaires. Espace dual. Transposée d'une application linéaire, orthogonalité, base duale. Bidualité.

3. Matrices et opérations matricielles

Algèbre $M_n(K)$ des matrices carrées à coefficients dans un corps K, rang d'une matrice. Représentation matricielle des applications linéaires. Changement de base.

4. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice. Groupe spécial linéaire SL(E). Orientation.

5. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Décomposition LU, méthode du pivot de Gauss. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées.

6. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme. En dimension finie, polynôme caratéristique, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton.

Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition d'un endomorphisme en somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent.

VI. Formes bilinéaires et quadratiques

1. Formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique.

En dimension finie, représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire, formes non dégénérées.

2. Orthogonalité. Bases orthogonales. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Formes réelles positives, inégalité de Schwarz, théorème d'inertie. Classification dans les cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

3. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Supplémentaires orthogonaux. Bases orthonormales.

Adjoint d'un endomorphisme. Groupe orthogonal O(E), groupe spécial orthogonal SO(E).

Décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions.

Endomorphismes symétriques. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique, exemples de méthodes algorithmiques. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive.

Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 et 3. Groupe des rotations du plan euclidien. Produit mixte, produit vectoriel. Notions d'angle, mesure des angles.

4. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Orthogonalité, norme. Supplémentaires orthogonaux, bases orthonormales.

Adjoint d'un endomorphisme. Notions sur le groupe unitaire U(E) et le groupe spécial unitaire SU(E).

Diagonalisation des endomorphismes normaux.

VII. Géométries affine et projective (le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la dimension est finie)

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repère affine, équations d'un sous-espace affine.

Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel.

2. Notions sur les espaces projectifs ; exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

Droite projective ; groupe des transformations homographiques, birapport.

VIII. Géométrie euclidienne

1. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Déplacements et antidéplacements. Décomposition en réflexions.

2. Cas de la dimension 2. Formes réduites d'une isométrie. Similitudes directes et indirectes. Groupes des isométries laissant stable une partie du plan.

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane. Sphère de Riemann. Groupe circulaire.

3. Cas de la dimension 3. Rotations dans l'espace, décomposition en demi-tours. Forme réduite d'un déplacement, vissages.

Groupes des isométries laissant stable une partie de l'espace.

4. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques et des quadriques dans un espace affine euclidien.

IX. Suites et fonctions. Notions élémentaires de topologie générale

1. Définition du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Caractérisation de $\mathbb{R}$. Topologie de $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.

Suites de nombres réels : limite, limite supérieure, limite inférieure, convergence des suites de Cauchy.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée. Nombres algébriques, nombres transcendants.

2. Espaces topologiques, espaces séparés. Limites. Applications continues, homéomorphismes. Produit d'espaces topologiques en nombre fini.

Espaces compacts, espaces localement compacts. Applications continues définies sur un espace compact.

Espaces connexes, espaces localement connexes, composantes connexes ; applications continues définies sur un espace connexe. Parties connexes de $\mathbb{R}$. Homéomorphismes d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle ; fonctions monotones, fonctions réglées.

3. Espaces métriques, applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Suites dans un espace métrique : convergence, suites de Cauchy.

Espaces complets, complété d'un espace métrique. Théorème du point fixe.

4. Espaces vectoriels normés. Norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes. Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

Espaces de Banach. Séries dans un espace vectoriel normé ; convergence des séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

Espaces vectoriels normés de dimension finie, équivalence des normes, parties compactes. Théorème de Riesz.

5. Espaces de Hilbert. Projection orthogonale. Bases hilbertiennes. Meilleure approximation dans un espace de Hilbert. Séparation de deux parties convexes par un hyperplan.

6. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple, convergence uniforme. Norme de la convergence uniforme. Théorème de Stone-Weierstrass.

Exemples d'espaces de Banach de suites ou de fonctions.

X. Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral

1. Dérivée en un point, dérivée à gauche, à droite. Fonction dérivée. Opérations algébriques sur les dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Sens de variation d'une fonction dérivable.

2. Intégration (les candidats sont libres d'adopter le point de vue de leur choix). Intégrales absolument convergentes, intégrales impropres. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calculs d'intégrales.

3. Dérivées d'ordre supérieur, fonction de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Dérivée n-ième d'un produit de deux fonctions. Formules de Taylor.

4. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités, développements asymptotiques.

5. Fonctions usuelles : fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithme et exponentielle ; nombre e ; fonctions puissance, fonctions hyperboliques et fonctions hyperboliques réciproques, fonction $t \to e^{it}$, fonctions circulaires, nombre π ; fonctions circulaires réciproques.

6. Fonctions convexes. Inégalités de convexité.

7. Passage à la limite dans les intégrales. Dérivabilité d'une limite de fonctions.

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

8. Analyse numérique élémentaire.

Interpolation polynomiale ; choix des points d'interpolation. Exemple de méthodes d'approximation polynomiale (en norme uniforme ou quadratique). Exemples de polynômes orthogonaux. Résolution approchée des équations $f(x)=0$, méthodes itératives, méthode de Newton et Regula falsi. Ordre, estimation de la performance.

Exemples de procédés d'accélération.

Intégration numérique : méthode des trapèzes, de Simpson, méthode d'accélération de Romberg. Exemples de méthodes gaussiennes. Estimation de la performance.

XI. Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: calcul différentiel et intégral

1. Différentielle ; fonctions de classe C^1. Composition des applications de classe C^1. Difféomorphismes. Dérivées partielles, matrice jacobienne.

Caractérisation des fonctions de classe C^1 en terme de dérivées partielles.

Théorème des accroissements finis.

Théorème d'inversion locale.

Théorème des fonctions implicites ; interprétation géométrique.

2. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Applications de classe C^k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral.

3. Étude locale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Points critiques. Recherche des extrema locaux. Extrema liés, interprétation géométrique.

4. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
(Les théorèmes de ce paragraphe pourront être admis).

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$; ensembles et fonctions mesurables ; ensembles de mesure nulle ; convergence presque partout d'une suite de fonctions mesurables.

Fonctions intégrables ; espaces L^1 et L^2.

Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. Dérivation sous le signe somme.

Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Application au calcul d'intégrales doubles et triples ; calcul de longueurs, d'aires et de volumes.

5. Formes différentielles de degré 1 ; intégrale sur un chemin ; formes exactes ; lemme de Poincaré sur un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$.

Notions sur les formes différentielles de degré 2 et 3 et sur la différentiation extérieure. Formes fermées, formes exactes ; intégration des formes différentielles, formule de Stokes (admise).

Formules utilisées en physique mathématique concernant le gradient, la divergence, le flux, etc.

XII. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes.

Cas des séries de nombres réels positifs : comparaison de deux séries, comparaison d'une série et d'une intégrale. Série $n^{-\alpha}$.

Convergence absolue.

Étude de la convergence des séries alternées. Exemples d'utilisation de la transformation d'Abel.

Convergence commutative des séries absolument convergentes.

Séries doubles. Produit de deux séries absolument convergentes. Produits infinis.

Estimation asymptotique du reste d'une série convergente et des sommes partielles d'une série divergente.

Calcul approché de la somme d'une série.

2. Séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes. Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. Application à l'étude de la continuité, de la dérivabilité, de l'intégrabilité d'une fonction définie comme somme d'une série.

3. Séries entières — Fonctions analytiques.

Séries entières ; rayon de convergence, propriétés de la somme sur le disque ouvert de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitive.

Fonctions de la variable réelle développables en série entière ; développement des fonctions usuelles.

Extension au domaine complexe des fonctions usuelles. Fonction exponentielle complexe, logarithme.

Fonctions analytiques de la variable complexe, fonctions holomorphes, conditions de Cauchy. Théorème de Cauchy (admis). Séries de Laurent, théorème des résidus, fonctions méromorphes. Suites, séries et produits infinis de fonctions analytiques.

4. Séries de Fourier.

Série de Fourier d'une fonction périodique d'une variable réelle à valeurs complexes. Convergence en moyenne quadratique, théorème de Parseval. Théorème de Dirichlet pour les fonctions de classe C^1 par morceaux.

XIII. Équations différentielles

1. Équations différentielles $x' = f(t,x)$ où f est une application de classe C^1 d'un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Dépendance des conditions initiales.

2. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes. Cas des coefficients constants. Exponentielle de matrice.

Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

3. Interprétation d'un système autonome en termes de champs de vecteurs. Exemples d'étude des courbes intégrales. Notion d'intégrale première.

4. Exemples classiques d'intégration par quadratures.

5. Exemples d'étude qualitative.

Exemples de problèmes de géométrie, de mécanique, de physique, de biologie, d'économie,... conduisant à des équations différentielles.

6. Exemples de méthodes numériques de résolution à pas séparés. Méthode d'Euler et de Runge-Kutta.

XIV. Géométrie différentielle — Cinématique

Dans toute cette partie on peut se placer sous des hypothèses de différentiabilité plus fortes que les minimales

1) Courbes définies paramétriquement en dimensions deux et trois ; tangente, plan osculateur, branches infinies.

Tracé des courbes planes définies paramétriquement.

Cas d'un espace euclidien : abscisse curviligne, courbure, torsion.

2. Cinématique du point. Repère mobile. Composantes de la vitesse et de l'accélération. Cas des coordonnées polaires. Trièdre de Frenet. Notion de cinématique du solide.

3. Sous variétés différentiables de dimension un de $\mathbb{R}^2$ et de dimension un ou deux de $\mathbb{R}^3$. Représentations locales (graphe, paramétrisation, submersion) Espace tangent. Exemples de surfaces.

Cas des surfaces dans un espace euclidien de dimension trois : application de Gauss, courbure.

Les épreuves écrites comportent trois épreuves :

A. Composition de Mathématiques générales
(durée : 6 heures ; coefficient 3).

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XIV, mais cette composition est davantage orientée vers l'algèbre, la géométrie et la topologie (titres I à IX (inclus)).

B. Composition d'analyse
(durée : 6 heures ; coefficient 3).

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XIV, mais cette composition est davantage orientée vers l'analyse (titres IX à XIV (inclus)).

C. Composition de mathématiques appliquées à options.
(durée : 6 heures ; coefficient 2).

Les connaissances figurant au programme des compositions de mathématiques générales et d'analyse peuvent être utilisées dans les 4 compositions de l'épreuve à option.

C1. Composition d'analyse numérique

Cette épreuve suppose connues les questions suivantes :

Interpolation polynomiale :

Interpolation de Lagrange.

Erreur d'interpolation.

Schéma de Neuville Aitken.

Choix des points d'interpolation.

Convergences.

Interpolation d'Hermite.

Approximation :

Meilleure approximation dans un espace de Hilbert

Approximation de Chebyshev dans $\mathbb{R}$

Quadrature numérique :

Méthodes de type interpolation.

Méthodes de Newton-Cotes.

Étude de l'erreur.

Stabilité et convergence.

Les méthodes composites.

La méthode des trapèzes et celle de Romberg.

La méthode de Simpson.

Les polynômes orthogonaux.

Les méthodes de Gauss.

Intégration des équations différentielles :

Les méthodes à pas séparés : consistance, stabilité et convergence, ordre, A-stabilité ; méthodes de Runge-Kutta.

Les méthodes à pas liés : consistance, stabilité, convergence et ordre. A-stabilité : méthodes d'Adams ; méthodes de prédiction-correction.

Résolution des équations :

La méthode des approximations successives.

Théorème d'existence et d'unicité du point fixe.

Résultats de convergence.

Ordre.

Méthodes pour une équation : Newton et Regula falsi.

Le procédé Δ^2 d'Aitken et la méthode de Steffensen.

Méthodes pour des systèmes d'équations.

Méthode de Bairstow.

Résolution des systèmes linéaires :

Méthodes directes : Gauss, Cholesky, Householder.

Méthodes itératives : Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation.

Méthodes de projection : plus profonde descente, gradient conjugué.

Calcul des valeurs propres :

Méthode de la puissance.

Méthode de Lanczos.

Méthode de Jacobi.

Algorithme LR et QR.

C2. Composition de mécanique générale

I. Cinématique

- Systèmes de références. Vitesse. Accélération.
- Composition des mouvements. Distribution des vitesses dans un solide rigide en mouvement. Repérage du solide rigide.
- Cinématique du contact de deux solides : glissement, roulement, pivotement.
- Mouvement plan sur plan.

II. Géométrie et cinématique des masses

- Centre d'inertie. Tenseur d'inertie.
- Quantité de mouvement. Quantité d'accélération.

III. Principes généraux de la mécanique

- Repère de Galilée.
- Loi fondamentale de la mécanique.

• Principe des puissances virtuelles.

• Actions de contact. Lois du frottement. Liaisons parfaites.

IV. Dynamique des systèmes de corps rigides

• Théorèmes généraux. Théorèmes de l'énergie cinétique.

• Équations de Lagrange pour des systèmes à liaisons holonomes et et non holonomes. Multiplicateurs de Lagrange.

• Étude des équilibres et des mouvements stationnaires. Stabilité, conditions suffisantes de stabilité, linéarisation. Cas des systèmes conservatifs : modes propres de vibration.

• Étude du mouvement dans le plan des phases.

• Équations canoniques. Transformations canoniques. Méthodes d'intégration d'Hamilton-Jacobi.

C3. Composition de probabilités et statistiques

Cette épreuve portera sur les questions suivantes :

I. Concepts généraux et instruments du calcul des probabilités

Notion de catégorie d'épreuves, d'événement. Tribu d'événements. Espace probabilisable. Mesure de probabilité. Espace probabilisé.

Système de constituants (partition de l'espace probabilisé).

Épreuves composées : espace-produit, distribution conjointe et distributions marginales.

Notion de variable aléatoire. Loi de distribution, fonction de répartition, densité.

Valeur moyenne, variance, écart-type, moments. Types de variables aléatoires. Inégalité de Bienaimé — Tchébichev. Exemples de loi de distribution : loi dégénérée, loi binomiale, loi de Poisson, loi uniforme sur un segment (a.b), loi de Laplace-Gauss, loi de Gauchy.

Système de n variables aléatoires : loi de distribution conjointe, lois marginales. Exemple : loi de Laplace-Gauss à n dimensions. Covariance, coefficient de corrélation, droites de régression : application aux lois de Laplace-Gauss à deux dimensions.

Fonction caractéristique ; fonction génératrice.

II. Probabilités conditionnelles. Indépendance stochastique

Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. Mesure de probabilité conditionnelle.

Formule de Bayes de « probabilité des causes ».

Distribution conditionnelle dans le cas d'épreuves composées. Tirage sans remplacement, loi hypergéométrique.

Espérance mathématique conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à un événement, par rapport à un système de constituants, par rapport à une tribu. Distributions conditionnelles. Courbes de régression.

Couple d'événements indépendants. Indépendance de deux ou plusieurs systèmes de constituants. Indépendance de deux ou plusieurs tribus d'événements.

Épreuves indépendantes. Épreuves répétées, problème de Bernoulli.

Variables aléatoires indépendantes ; somme de variables aléatoires, produit de convolution de leurs lois et produit de leurs fonctions caractéristiques. Loi du X^2, loi de Student.

III. Notion de convergence. Loi des grands nombres. Théorèmes limites.

Convergence en loi ; convergence en fonction caractéristique ; convergence faible. Équivalence entre ces trois types de convergence.

Notions de convergence stochastique, convergence presque sûre, convergence en moyenne d'ordre 2 pour une suite de variables aléatoires.

Lois (faible et forte) des grands nombres.

Loi du tout ou rien, lemme de Borel-Cantelli.

Théorèmes limites ; convergences vers la loi de Gauss (théorème de Moivre-Laplace) ; convergence vers la loi de Poisson.

IV. Statistiques

Notions élémentaires de statistique.

Problème de l'échantillonnage — Estimation des paramètres — Méthode du maximum de vraisemblance. Tests du X^2 et de Student.

Comparaison entre une distribution expérimentale et une distribution théorique.

C4. Composition de mathématiques de l'informatique

Attendus

1. Il n'entre pas dans l'esprit de ce programme de se substituer à une agrégation d'informatique et il n'est bien entendu pas prétendu à l'exhaustivité. Les auteurs sont conscients du fait que l'option représente un coefficient relativement modeste par rapport à l'ensemble de l'épreuve et s'adresse à des candidats dont la formation est de manière prépondérante mathématique. On a ainsi cherché à retenir des sujets dont la présentation peut être effectuée de manière rigoureuse et qui puissent intéresser des mathématiciens tout en leur montrant des techniques spécifiquement informatiques et des méthodes de nature mathématique fortement liées à la réalité informatique. L'équilibre proposé pourra (et même certainement devra) être revu en fonction de l'évolution de la discipline.

2. Par rapport au programme et aux options déjà existantes à l'agrégation, les choix effectués correspondent aux parties les plus mathématisées de l'informatique et qui semblent le mieux s'articuler sur le programme actuel des licences et maîtrises de mathématiques. L'aspect numérique n'est pas traité puisqu'il existe déjà une option Analyse numérique à l'agrégation de mathématiques.

3. Nature de l'épreuve : l'épreuve est une épreuve théorique qui ne nécessite l'usage d'aucun moyen de calcul spécifique. Le problème posé sera un problème de nature mathématique issu de la pratique informatique. Une expérience préalable de la programmation de la part des candidats est donc nécessaire, même si l'épreuve elle-même ne comporte pas de programmation sur ordinateur.

Prérequis

1. On suppose connues les notions générales de structure et de fonctionnement des ordinateurs.

2. On supposera de la part des candidats une connaissance de base de la programmation et du langage de programmation Pascal. Ce langage sera utilisé comme support pour la description des algorithmes du cours.

Il pourra être de surcroît utilisé lors de l'épreuve dans la formulation du sujet, et par les candidats pour la formulation, l'évaluation de la complexité ou la preuve de leurs solutions.

I. Techniques de base

Ces techniques seront développées ultérieurement dans les diverses parties du programme.

1. Rappels sur les structures de données et de contrôle de base de l'informatique

— Piles, files, listes, arbres, graphes et leur représentation.

— Récursivité, dérécursification.

— Algorithmique élémentaire des graphes, recherche en profondeur, connectivité (cf. l'ouvrage de Sedgewick cité plus bas, pp. 373-432).

2. Preuves et transformation de programmes

— Premiers éléments sur les méthodes d'assertions, les preuves par récurrence.

Nous entendons par là : démonstration de propriétés de programmes comme la terminaison, l'équivalence... ; transformations d'optimisation comme par exemple l'élimination de la récursivité terminale.

3. Évaluation de la complexité des algorithmes et des programmes

Mesures de complexité « naïves » correspondant à des décomptes d'opérations élémentaires d'instructions de programmes dans un langage évolué. Il n'est pas question d'effectuer de décompte d'opérations sur des programmes exprimés en langage assembleur.

Références : J. Arsac. *Les bases de la programmation*, Dunod : D. Gries. *The Science of Programming*, Springer. N. Wirth, *Algorithms + Data Structures = Programs* Prentice Hall : pour la partie 1 : 3. D. Knuth, *The Art of Computer Programming*. vol. 1. les pages 94-102.

II. Algorithmique

Le but de cette partie est la présentation d'un ensemble de méthodes bien définies et dont la complexité est bien comprise pour résoudre certains des problèmes fondamentaux du tri et de la recherche d'information. On partira d'une spécification précise des algorithmes (en Pascal) et l'on montrera comment réaliser les analyses mathématiques des performances des principaux d'entre eux.

La description ci-dessous n'est pas un catalogue : le domaine étant très vaste, on s'est efforcé de délimiter le sujet par des références bibliographiques très précises. Il est entendu que l'introduction des algorithmes et structures de données doit être l'occasion d'illustrer simultanément des méthodes générales de construction, de preuve et d'évaluation de performance (analyse) des programmes concernés (BB), (Wi), (Gries)...

1. Les algorithmes de tri : tri par insertion simple (Se, p. 96-99 ; Kn, p. 80-82) ; éléments sur les inversions dans les permutations (Kn, p. 11-18). Tri rapide (Quicksort ») et tri par tas (« Heapsort ») (Se, p. 103-113, 127-141 ; Kn, p. 114-123, 145-149). Borne inférieure en 0 (n log n) pour un modèle de tri par comparaison.

2. Méthodes de recherche : arbres de recherche (Se, p. 171-185 ; Kn p. 422-433). Principes d'équilibrage (Kn). Hachage : chaînage séparé, adressage ouvert et

double hachage (Se, p. 201-211 ; Kn. p. 506-524) : analyses (Kn, p. 527-532).

Références : L'essentiel des algorithmes est décrit en Pascal, dans l'ouvrage de Sedgewick (Se) *Algorithms*, Addison-Wesley (Les analyses sont traitées dans le livre de Knuth (Kn), *The Art of Computer Programming : Sorting and Searching*. Addison-Wesley (Vol. 3, 1973). Deux références complémentaires utiles sont constituées par les ouvrages de Beauquier, Berstel et Chrétienne *Éléments d'algorithmique*, Masson (1992) et de Froidevaux, Gaudel & Soria, *Types de données et algorithmes*, Mcgraw Hill (1990).

III. Langages

A. Automates finis et langages reconnaissables (HU. sections 2.1-2.3). (La, sections 6.1-6.2). Langages rationnels et théorème de Kleene (La 6.3). (HU. 2.4-2.5). Automate minimale.

2. Grammaires algébriques, arbres de dérivation et définition de l'ambiguité (HU 4.2-4.3) (La 9.1). Automates à piles (HU, chapitre 5). Principes d'analyse syntaxique ascendante et descendante.

Références : (HU) J. Hopcroft, J. Hullman, *Introduction to Automata Theory. Languages and Computation*, Addison-Wesley (1979) ; (La) S. Lallement. *Semigroups and combinatorial applications*, Wiley & Sons (1979) ; (Lo) Lothaire. *Combinatorics on Words*. Encyclopaedia of Mathematics. Addison-Wesley (1983).

M. Harrison : *Introduction to Formal Language Theory*, Addison-Wesley (1978).

IV. Calculabilité

1. Fonctions primitives récursives et fonctions récursives. Définition des machines à registres et des langages impératifs simples. Preuve d'équivalence entre fonctions récursives et machines à registres. Définition des machines de Turing : on admettra l'équivalence avec les autres modèles de calculabilité. Notions d'indécidabilité : indécidabilité du problème de l'arrêt (on admet l'existence d'une machine universelle).

2. Réduction polynomiale entre ensembles. Les classes P et NP, NP-complétude et théorème de Cook. Pour la démonstration, on admettra l'équivalence polynomiale entre machines de Turing déterministes (resp. non déterministes) et le langage Pascal (resp. doté d'un mécanisme de choix non déterministe). Exemples de problèmes NP complets.

Références : Pour la première partie : (MI) M. Minski, *Computation : Finite and Infinite Machines*. Pour la seconde partie, les très classiques : (AHU) A. Aho, J. Hopcroft, J. Ullman, *The Design and Analysis of Efficient Computer Algorithms* ; (GJ) M. Garey, D. Johnson. *Computers and Intractbility, a guide to NP-completeness*. Freeman ed.

Pour les deux parties : Davis & Weyuker : *Computability, Complexity and Languages*, Academic Press

V. Sémantique

1. Sémantique dénotationnelle des fonctions et procédures récursives : interprétation par plus petit point fixe.

Théorème du point fixe de Knaster-Tarski.

2. Éléments de logique : calcul des propositions et calcul des prédicats (logique du premier ordre). Logique de Hoare et preuve de programmes par assertions. Transformations de programmes, dérécursivation, optimisations et preuves de correction.

On se limitera dans (1) à donner le minimum de logique cohérent permettant (2).

Références : (Li) Livercy, *Théorie des programmes*, Dunod ; (MA) Z. Manna, *Mathematical Theory of Computation*, Mc Graw Hill (1974).

Référence valant pour plusieurs paragraphes :

Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen ed., Elsevier 1990.

Plus particulièrement le volume B : *Formal Models and Semantics* :

Chap. I : *Finite automata* (pour les langages)

Chap II : *Denotational semantics et I2 : Semantic domains* (pour la sémantique)

ÉPREUVES DÉFINITIVES (ORAL)

I. Programme

Première épreuve (algèbre et géométrie) (coefficient 4)

Le programme de cette épreuve est constitué par :

— les titres I à VIII (inclus) ;

— le titre XIV.

Seconde épreuve (analyse, probabilités) (coefficient 4)

Le programme de cette épreuve est constitué par :

— les titres IX à XIII (inclus) ;

— le programme complémentaire suivant consacré aux probabilités.

I. Espaces de probabilité

Notions d'épreuve, d'événement. Tribu d'événéments. Espace probabilisable. Mesure de probabilité. Espace probabilisé.

Cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini ou dénombrable.

II. Indépendance et conditionnement

Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. Mesure de probabilité conditionnelle.

Formule de Bayes de « probabilité des causes ».

Couple d'événements indépendants. Indépendance de deux ou plusieurs tribus d'événements.

III. Variables aléatoires

Notion de variable aléatoire à valeurs réelles. Loi de distribution ; fonction de répartition. On se limitera au cas d'une loi discrète et à celui d'une loi définie par une densité continue par morceaux.

Valeur moyenne, variance, écart-type, moments. Inégalité de Bienaimé-Tchébichev.

Exemples de lois de distribution : loi dégénérée, loi binomiale, loi de Poisson, loi uniforme sur un segment (a.b.), loi exponentielle, loi de Laplace-Gauss.

Indépendance de deux ou plusieurs variables aléatoires. Produit de variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme.

IV. Théorèmes limites

Loi faible des grands nombres.

Énoncé et exemples d'utilisation d'un théorème de convergence vers la loi normale.

II. Instructions

L'agrégation est un concours de recrutement d'enseignants dont la culture mathématique doit permettre de dominer l'ensemble des programmes du second degré et ceux des classes préparatoires aux grandes écoles.

L'oral permet d'apprécier :

— par la construction d'un plan sur un sujet donné, les qualités d'organisation et de synthèse des candidats ;

— par une discussion relative à ce plan, la précision et la rigueur de leur raisonnement, quel que soit le niveau de l'étude proposée ;

— par l'exposé détaillé d'une partie du plan, leurs qualités d'exposition et de présentation, sur l'importance desquelles il apparaît opportun d'insister.

Les modalités sont les suivantes pour chacune des deux épreuves orales :

1. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets au choix. À l'issue de trois heures de préparation, il indique au jury celui des deux sujets qu'il a choisi.

Pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place (bibliothèque de l'agrégation). Il peut également utiliser des ouvrages de référence qu'il a apportés lui-même. Ces ouvrages doivent être imprimés, vendus dans le commerce, et ne pas comporter de notes manuscrites. Ils seront contrôlés au moment de l'épreuve par le jury qui peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge qu'elle risque de dénaturer le travail de préparation.

La liste des livres de la bibliothèque de l'agrégation est publiée chaque année dans le rapport du concours précédent.

2. Sur le sujet choisi, le candidat n'a pas à bâtir une leçon détaillée destinée à une classe d'un niveau déterminé ou correspondant à un nombre limité d'heures de cours. Il lui est demandé surtout une étude de synthèse construite à partir d'une base de connaissance ne dépassant pas les limites du programme d'oral. Le candidat a le libre choix du niveau auquel il place son exposé ; le niveau d'une classe de terminale risque cependant d'être insuffisant et d'autre part les connaissances exposées doivent être réellement maîtrisées.

3. L'épreuve commence par la présentation, en quinze à vingt minutes, d'un plan d'étude qui ne doit être ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations.

Il s'agit de définir avec précision les notions introduites, de donner des énoncés complets des résultats fondamentaux, de citer des exemples et des applications et d'insister sur l'enchaînement des idées.

4. Après la présentation du plan le candidat est invité à fournir au jury une liste d'au moins deux points qu'il juge important dans son étude. C'est parmi ces points que le jury choisit le thème d'un exposé, qui peut être soit le développement détaillé d'une partie bien délimitée du plan, soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif. La netteté et la clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté, constituent pour le jury un facteur important d'appréciation.

5. L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan et l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en

rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Cette discussion permet ainsi au candidat de développer, de justifier et d'illustrer son point de vue, en même temps qu'elle met en valeur sa culture mathématique.

Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

6. Les candidats sont invités, notamment pour illustrer et compléter une leçon, à utiliser leurs connaissances en matière de méthodes numériques, d'algorithme, et de programmation des ordinateurs.

★

SCIENCES PHYSIQUES — OPTION PHYSIQUE

I. ÉPREUVES ÉCRITES

Épreuves A et C

Le programme des épreuves A (composition de Physique) et C (problème de Physique) est constitué par :

1. Le programme de Physique des classes de Mathématiques supérieures et de Mathématiques spéciales M, M', P et P', défini par l'arrêté du 18 mai 1984 (*Bulletin officiel* n° 28 du 12 juillet 1984).

2. Le programme de Physique des classes de Biologie-Mathématiques supérieures, et Biologie-Mathématiques spéciales, défini par l'arrêté du 10 mai 1984.

3. Les programmes de Physique et de Mécanique du concours d'entrée dans certaines écoles d'ingénieurs réservés aux titulaires du diplôme d'études universitaires générales (mention Sciences), définis par l'arrêté du 23 octobre 1985 (*Bulletin officiel* n° 41 du 21 novembre 1985).

4. Les annexes ci-dessous qui, sur certains points, complètent ou précisent les deux précédents alinéas.

L'épreuve A pourra comporter des questions axées sur les connaissances d'ordre expérimental requises à l'épreuve de montage.

Pour l'ensemble du programme, le niveau retenu est celui de la licence et de la maîtrise de Physique des universités.

La présence d'un astérisque dans les annexes ci-dessous indique que, sur le point correspondant, l'on doit viser un savoir-faire pratique et qu'il ne sera pas demandé aux candidats de présenter un exposé synthétique, ni de fournir une justification rigoureuse des règles d'usage.

Mécanique

I. Systèmes mécaniques

Théorèmes fondamentaux : éléments de mécanique du solide.

Principes d'extremum en Mécanique* Lagrangien et équations de Lagrange*.

Vibrations et propagation des phénomènes vibratoires :

Notions élémentaires d'élasticité.

Modes propres de vibration d'un système mécanique linéaire, doté d'inertie et d'élasticité (distributions discrètes ou continues).

Ondes élastiques dans les milieux isotropes.

II. Relativité restreinte : notion d'événement : transformation spéciale de Lorentz : éléments de cinématique et de dynamique relativistes. Lois de transformation des sources et du champ électromagnétique. Notions sur le formalisme quadrivectoriel.

Production, propagation, réception et utilisation des ondes électromagnétiques (traitement non quantique)

Rayonnement d'une particule chargée accélérée ; caractérisation du champ électromagnétique rayonné.

Antennes ; propagation libre et guidée : modes propres d'une cavité.

Cohérences spatiale et temporelle des ondes électromagnétiques.

Diffraction, interférences et applications de ces phénomènes : optique de Fourier.

Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels et applications.

Physique de l'atome et du noyau (phénoménologie et modèles élémentaires)

I. Interactions entre matière et rayonnement électromagnétique

Quantification du rayonnement. Quantification des énergies électroniques.

— Effet photoélectrique. Effet Compton.

— Spectres optiques. Spectres de rayons X. Excitation électronique d'une vapeur atomique.

— Transitions radiatives : absorption, émission, coefficients d'Einstein.

— Interférences et diffraction de particules matérielles.

II. Structure des atomes

— Modèles de Rutherford et de Bohr ; expérience de Rutherford.

— Atome d'hydrogène : atomes hydrogénoïdes ; atomes à plusieurs électrons dans l'approximation du champ central ; notion de configuration électronique.

— Expérience de Stern et Gerlach ; effet Zeeman ; couplage spin-orbite ; résonance magnétique.

III. Notions sur la structure du noyau et sur les applications de l'énergie nucléaire

Notions sur les grandes catégories de particules « élémentaires » et leurs interactions.

Mécanique quantique — Formalisme*

— Formalisme des fonctions d'onde. Formalisme de Dirac (notation bra-ket). États d'un système, grandeurs physiques et observables, mesure des grandeurs physiques, état d'un système après une mesure.

— Système à deux états couplés.

— Évolution des systèmes : équation de Schrödinger.

— Systèmes de particules identiques. Principe de Pauli.

Mécanique quantique — Applications

— Potentiels carrés à une dimension (marches de potentiel, effet tunnel, puits fini et puits infini).

— Oscillateur harmonique.

— Moment cinétique orbital et de spin. Règles de composition des moments cinétiques*.

— Particule dans un potentiel central. Atome d'hydrogène.

— Notion de probabilité de transition.

Physique statistique, thermodynamique et propriétés de la matière

I. Postulats statistiques. Équilibre statistique

— Interaction thermique ; ensemble canonique ; facteur de Boltzmann.

— Fonctions thermodynamiques relatives à l'ensemble canonique, fonction de partition.

— Application au gaz parfait classique ; entropie du gaz parfait.

— Ensemble canonique généralisé : potentiel chimique*

— Statistiques quantiques. Applications au gaz parfait d'électrons, au rayonnement, aux vibrations réticulaires dans les solides. Condensation de Bose ; exemples*.

— Fluctuations statistiques.

II. Fonctions thermodynamiques

— Définitions, propriétés, variables thermodynamiques, transformations de Legendre.

— Potentiels thermodynamiques et conditions d'équilibre.

— Changements d'état de première espèce ; notion sur les transitions d'ordre supérieur.

III. Description et interprétation, au niveau microscopique, des propriétés diélectriques et magnétiques de la matière (un traitement quantique et approfondi des assemblées de spins est exclu).

IV. Approche cinétique élémentaire des phénomènes de transport : diffusion, conductibilité thermique, conductibilité électrique, viscosité.

Mécanique des fluides

— Modèle du fluide continu. Fluide compressible et incompressible en équilibre ; champ de pression ; éléments de statique.

— Description d'un fluide en mouvement. Champ des vitesses. Flux de masse, relation de continuité. Ecoulements stationnaires ; ligne et tube courant.

— Fluides non visqueux ; équation d'Euler. Relation de Bernoulli (cas du fluide incompressible et de la détente adiabatique réversible d'un fluide compressible).

— Forces de viscosité d'un fluide incompressible ; coefficient de viscosité. Application aux écoulements stationnaires de fluides visqueux dans des géométries simples.

— Notions de régime laminaire et régime turbulent* ; nombre de Reynolds.

Électronique

— Notions élémentaires sur les semi-conducteurs.

— Réalisations des fonctions de l'électronique analogique : amplification, sommation, dérivation, intégration, comparaison, retard, adaptation des impédances, génération de signaux, etc.

— Notions sommaires sur les dispositifs utilisés en élec-