Université de Nancy

Agrégation de Mathématiques

Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide de séries entières

1. Soit Φ une fonction continue sur $[0,+\infty[$, décroissante, positive et telle que
$$\int_0^{+\infty} \Phi(x)\ dx < +\infty.$$
Montrer que
$$\lim_{h\to 0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \Phi(nh) = \int_0^{+\infty} \Phi(x)\ dx.$$
2. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt.$$
3. Soient $(A_n),(B_n)$ deux suites de réels. On suppose que la suite (B_n) est à termes positifs, que les séries entières$\sum A_n x^n$ et $\sum B_n x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, mais que la série de terme général A_n diverge. On suppose en outre qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n} = \lambda$. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = +\infty$, puis que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n} = \lambda.$$
Ceci est un résultat important qui peut trouver sa place dans une leçon d'agrégation sur les séries entières. On peut le retrouver dans FGN Analyse 2, ex 3.23.
4. On pose $I = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt$. Montrer que
$$I^2 = \lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| x^n = \lim_{x\to 1^-} (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |B_n| x^n,$$
où $b_n = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2; a^2+b^2 = n\}$ et $B_n = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2; a^2+b^2\leq n\}$.
5. Montrer que $Q(\sqrt{n}) \subset B_n + [0,1]^2 \subset Q(\sqrt{n}+\sqrt{2})$, où $Q(r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2; \sqrt{x^2+y^2}\leq r\}$. En déduire $B_n \sim \frac{\pi}{4} n$.
6. Calculer I.

Remarques

— La méthode de la question 2. permet de relier, via le changement de variable $x = e^{-h}$ l'étude au bord du cercle de convergence à une intégrale. De la même manière, on peut étudier $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ au voisinage de 1, pour $x < 1$: on trouve $s(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. La dernière intégrale peut s'exprimer aisément en fonction de l'intégrale de Gauss.

— Le résultat de la question 3. permet aussi d'étudier le comportement d'une série entière au bord, en comparant ses coefficients à ceux d'une série bien connue. [1]
Par exemple, si $a_n \sim n$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \sim_{x\to 1^-} (1-x)^{-2}$. En mettant comme ici, les deux méthodes ensembles, on peut obtenir de très jolies choses.
Exemple : On sait que $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} x^n$, avec un rayon de convergence 1. Il n'est pas très difficile de déduire des équivalents de Wallis que $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. On en déduit que si $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, alors
$$s(x) \sim \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$
Vu la remarque précédente, on en déduit $\sqrt{\pi} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, d'où la valeur de l'intégrale de Gauss.
Exercice bonus :
Soient (X_n) des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Donner un équivalent lorsque x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{\infty} X_n x^n$.

— Un truc plus général : on prend des A_n, B_n positifs (pour simplifier), des fonctions f_n positives bornées définies sur $[0,1]$ et on suppose que les séries $\sum_{n\geq 0} A_n f_n(x)$ et $\sum_{n\geq 0} B_n f_n(x)$ convergent pour $x \in [0,1[$. On suppose en outre qu'il existe λ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n} = \lambda$. et que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n f_n(x) = +\infty$. (Cette dernière condition sera par exemple vérifiée si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} A_n f_n(x)$ est croissante et que la série de terme général $A_n f_n(1)$ diverge.) Alors,
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} B_n f_n(x)}{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n f_n(x)} = \lambda.$$
Une jolie application de ça est l'identité entre densité de Dirichlet et

1. Il peut avoir sa place dans une leçon d'agrégation sur les séries entières. On le trouve en exercice chez Voedts p. 565 ou chez Pommelet p. 235.

densité naturelle lorsque cette dernière existe. [2]
Soit S et T deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{n\in T}\frac{1}{n}=+\infty$. La densité naturelle supérieure de S dans T est $\limsup_{n\to+\infty}\frac{|S\cap\{0,\dots,n\}|}{|T\cap\{0,\dots,n\}|}$, la densité naturelle inférieure de S dans T est la limite inférieure de la même quantité. Quand les deux coïncident, on dit que c'est la densité naturelle de S dans T.
Si S a une densité naturelle λ dans T, alors

$$\lim_{s\to 1^-}\frac{\sum_{n\in S}n^{-s}}{\sum_{n\in T}n^{-s}}=\lambda.$$

C'est cette dernière limite qui est appelée la densité de Dirichlet. Elle peut exister sans que la densité naturelle existe.
Posons $A_n=|S\cap\{0,\dots,n\}|$ et $B_n=|T\cap\{0,\dots,n\}|$
Avec une transformation d'Abel, on peut écrire

$$\sum_{n\in S}n^{-s}=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n-A_{n-1})\,n^{-s}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

et de même

$$\sum_{n\in S}n^{-s}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s})$$

De la divergence de la série $\sum_{n\in T}n^{-s}$, on déduit que

$$\lim_{s\to 1^+}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s})=\lim_{s\to 1^+}\sum_{n\in S}n^{-s}=+\infty.$$

Comme A_n/B_n vend vers λ, il suffit alors d'appliquer le résultat général.

2. Pour d'autres résultats autour de la densité naturelle et de la densité de Dirichlet, voir par exemple Garet-Kurtzmann, page 52.