Université de Lorraine **année 2014-2015**

Agrégation de Mathématiques

Les développements de probas dans les leçons d'Analyse (et Probas !)

Je me base essentiellement sur notre livre Garet-Kurtzmann [GK]. Je rappelle que les exercices "non corrigés" ont des indications en fin de livre très utiles. Le livre d'exercices Cottrell–Genon-Catalot–Duhamel–Meyre [CGDM] est aussi intéressant. On pourra notamment consulter son appendice : *Processus de Poisson*, si l'on souhaite évoquer cette notion.

La liste de leçons

- 249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.
- 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
- 261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
- 262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
- 263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Ces six leçons reposent sur le même corpus scientifique : le contenu d'un enseignement de probas de L3 d'une bonne université. Il y a évidemment des intersections.

Comme on verra dans le tableau terminal, un nombre raisonnable de développements permet de couvrir les six leçons. Attention, le plan, qui n'est pas traité ici (se rapporter à vos leçons d'oral) est très important ! C'est le plan qui peut justifier le choix des développements, pas l'inverse. Il faut aussi se souvenir que beaucoup de mini-preuves, pas suffisantes pour former un développement peuvent (et doivent) se glisser dans le plan.

1 Commentaires sur quelques résultats pouvant servir de base de développements

- Théorème du retour de Poincaré ([GK], exercice corrigé 23 p. 94). Un très beau résultat de base de la théorie ergodique. Dans le livre, c'est écrit avec avec des intégrales, il convient ici de le réécrire avec des espérances. Si il reste du temps, on peut traiter un des exemples $\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$ (voir ci-dessous)

— Le résultat sur la convolution des lois Gamma ([GK], p.163) est l'exemple par excellence de calcul de densité d'une somme de variables indépendantes. C'est un grand classique des sujets d'examen de L3. C'est un résultat important, par exemple parce que les lois exponentielle et de χ^2 sont des lois gammas. La loi exponentielle se simulant aisément par inversion, ce résultat a des applications a la simulation de lois Gamma ou χ^2. Tout seul, c'est peut être un peu court, on peut le coupler avec la preuve de la formule de convolution ([GK], p. 162) Ce résultat ouvre également la porte à un algorithme de simulation de la loi de Poisson. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ, qu'on pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors si pour $t > 0$, on définit $N_t = \sup\{n \geq 0; S_n \leq t\}$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt. Ce n'est pas très difficile, voir par exemple le problème II
`http://iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/cours/m606/annales/m606_0604.pdf`
et
`http://iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/cours/m606/annales/m606_0604c.pdf`

— Loi de Dirichlet [GK] page 174. C'est un exercice (corrigé dans le cours) très riche, bon exemple d'application du théorème de C^1-difféomorphisme. Les questions 2 et 3 sont indépendantes, ce qui permet de développer 1+2 ou 1+3 suivant la leçon. Point culturel : les lois de Dirichlet apparaissent par exemple comme loi limite dans un schéma d'urne de Pòlya à plusieurs couleurs (voir mon cours de M1)

— $\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$ ([GK], 35 page 137 et 47 page 179) : ce sont des petits calculs de lois à densité, sur le thème des transformations préservant la mesure, qui est la base de la théorie ergodique. On peut les lier au théorème du retour de Poincaré.

— Théorème d'Erdös sur les ensembles sans-somme ([GK], exercice corrigé 50 page 179). Très beau résultat qui illustre la méthode probabiliste (prouver l'existence d'objets à l'aide des probabilités). Comme il utilise $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il trouve aussi sa place dans certaines leçons d'algèbres.

— Volume de la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ([GK], exercice corrigé 61 page 182). Les lois Gamma au service du calcul du volume des boules. Permet de montrer sa maîtrise des techniques de calcul d'espérance, de loi image...

— Exponentielles et triangles ([GK], exercice corrigé 62 page 182). Un mélange sympathique de calculs de lois et de géométrie

— indicatrice d'Euler [GK], 4 page 53 (exercice non corrigé. Corrigé dans [CGDM])
C'est un classique. Comme indiqué dans les indications de [GK], il y a à un moment deux argumentations possibles, la plus courte (celle choisie par exemple par [CGDM]) utilisant le fait que si des événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi. Ce n'est pas un fait anodin : il faut savoir le justifier, cf par exemple [GK], exercice corrigé 18 page 50.
Ce développement peut se recaser dans des leçons d'algèbre (en particulier celle de dénombrement).

— Loi Zeta, indépendance [GK], 1 page 139, questions e et f (exercice non corrigé).
Exercice original, qui permet de montrer qu'on sait prouver l'indépendance d'une famille infinie de variables aléatoires.
ou, sur le même thème, plus facile : [GK], exercice corrigé 19 page 50. On donne une preuve probabiliste du développement eulérien de la fonction ζ, on en déduit (entre autres) la divergence de la série des inverses des nombres premiers. Pourquoi pas pimenter avec ça une leçon sur les séries ?
Les lois Zeta ont leur importance en théorie des nombres, car elles sont liées à la densité de Dirichlet (voir [GK] p. 52-53, ainsi que l'article "Les lois Zêta pour l'arithmétique, paru dans le numéro 96 du magazine *Quadrature*)

— polynômes de Bernstein [GK], page 177
C'est un classique. Peut se recaser dans des leçons d'analyse

— inégalité de Le Cam : [GK], page 186 (exercice non corrigé). Jolie preuve, pas très difficile. C'est très lié au couplage. Si on le propose, c'est une bonne idée de glisser des idées sur le couplage ailleurs dans le développement

— récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: [GK],page 228-229. Très bon développement. On peut le présenter à plusieurs niveaux. La manière la plus simple est d'utiliser Stirling (ou Wallis). Mais on peut également utiliser le lien avec la fonction caractéristique (établi au lemme 9.4.2 pages 229 dans le cas général, ainsi que, pour le cas plus simple de $\mathbb{Z}$, à la question 1 de l'exercice corrigé 75). On a ainsi $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi_{S_n}(t)\ dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos t)^{2n}\ dt$ pour obtenir avec Tonelli (ou la convergence monotone)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-\cos^2 t}=+\infty.$$

Sous cette forme, on peut l'introduire dans une leçon sur les séries de Fourier.

— critères de transience/récurrence des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$: [GK],page 230-222.
C'est un peu la suite du développement précédent. Je suggère d'admettre le critère de récurrence/transience avec la somme de la série, ainsi que l'expression intégrale de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ qui doit être donnée dans le plan. On peut aussi regarder le livre de Benaïm–El Karoui *Promenade Aléatoire*, qui traitent directement le cas de la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}^d$ et tirent partie du fait que la fonction caractéristique de S_{2n} est réelle positive.
Ce résultat a évidemment sa place dans " Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications."

— loi forte des grands nombres avec un moment d'ordre 2 : [GK], page 248. Très bon développement, qui sans être très difficile, présente beaucoup d'idées importantes.

— nombres normaux : [GK], page 258 (exercice corrigé 83).
Développement un peu difficile, mais sans doute recasable dans des leçons d'analyse. On n'est pas obligé de présenter l'exercice jusqu'au bout : montrer que la suite des chiffres est iid est suffisant pour étudier la fréquence des chiffres avec la loi forte des grands nombres.

— existence de variables indépendantes : [GK], page 259 (exercice corrigé 84)
Pas très dur, attention toutefois à ne pas dire de bêtises sur la fonction de répartition inverse

— valeurs d'adhérence de binomiales : [GK], page 259 (exercice corrigé 86)
Bon développement original, avec un énoncé saisissant, et une preuve pas trop dure. Remarquer l'analogie avec la preuve de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

— preuve du TCL en dimension 1 : [GK], page 277.
Classique. Tout seul, c'est à mon avis un peu juste, à compléter avec une application. Je propose : [GK], exercice non corrigé 4 p 286. À un moment, on doit montrer que si les X_n sont iid centrés avec un moment d'ordre 2 σ^2 et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors $\mathbb{E}[|S_n|]/\sqrt{n}$ tend vers $\mathbb{E}|X|$ où X suit $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Avec des notions sur l'équi-intégrabilité, c'est immédiat car la suite $S_n/\sqrt{n}$ est bornée dans L^2, donc équi-intégrable. Le résultat découle alors du théorème B.1.1. page 368.
Néanmoins, on peut le faire "à la main" avec le matériel du chapitre,

comme suit : on a

$$\frac{\mathbb{E}[|S_n|]}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|S_n| > \sqrt{n}t)\ dt,$$

or pour tout t, $\mathbb{P}(|S_n| > \sqrt{n}t)$ tend vers $\mathbb{P}(|X| > t)$, et grâce à l'inégalité de Tchebitchev, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \sqrt{n}t) \leq \min(1, \frac{\sigma^2}{t^2}),$$

ce qui permet de conclure avec le théorème de convergence dominée. Voir également l'annexe.

— Événements rares : [GK], page 356 (exercice non corrigé)
Le point clef, est, comme dans la preuve du TCL, que pour des nombres complexes de module inférieur ou égal à un, la différence du produit est plus petite que la somme des différences. Évoquer la proximité de ces deux preuves est une bonne idée.

— Convergence de la série de Dirichlet : $\sum_{n\geq 1} \pm \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1/2$ avec des signes aléatoires (voir fiche distribuée)
Peut se recaser dans des leçons d'analyse. Bien sûr, si on admet l'inégalité de Hoeffding, c'est trop court. Il faut la démontrer dans le cas général ou dans ce cas particulier. Ce résultat a évidemment sa place dans "Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications."

— Nombre de cycles d'une permutation : [GK], page 354 (exercice corrigé 105)
Si C_n est le nombre de cycles d'une permutation choisie suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, alors $\frac{C_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
Développement original, peut se recaser dans des leçons d'algèbre.

— Théorème de Steinhaus sur l'ensemble de coupure d'une série trigonométrique aléatoire : [GK], page 355 (exercice corrigé 106)
Développement original et difficile, peut se recaser dans des leçons d'analyse.

— Preuve probabiliste de la formule de Stirling (à partir du TCL) : [GK], page 283 (exercice corrigé 93)
C'est un classique de l'agreg, apparu d'abord je pense dans Foata–Fuchs. J'hésiterais à l'introduire dans une leçon d'analyse dont le titre ne mentionne pas explicitement les probabilités, car Stirling peut se prouver de manière très efficace avec la méthode de Laplace, qui n'est pas complètement étrangère à cette preuve.

— Loi 0–1 de Kolmogorov et applications aux séries de variables i.i.d. : [GK], pages 115,141, 341.

Tableau synoptique

	bernoulli	esp/mom	fc/Lap	conv.	discret	continu
Théorème du retour		oui		oui		oui
Convolution des lois gamma						oui
Loi de Dirichlet		oui				oui
$\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$						oui
Sans-somme		oui			oui	
Volume de la boule unité						oui
Exponentielles et triangles						oui
Indicatrice d'Euler					oui	
Loi Zeta					oui	
Polynomes de Bernstein	oui	oui		oui	oui	
Inégalités de Le Cam	oui				oui	
marche sur $\mathbb{Z}$	oui		oui		oui	
marche sur $\mathbb{Z}^d$	oui		oui		oui	
LFGN L2	oui	oui		oui		
nombres normaux	oui			oui		
existence de vaiid	oui			oui		oui
val. adh. de binomiales	oui			oui	oui	
TCL + application	oui		oui	oui		oui
Evénements rares	oui		oui		oui	
série Dirichlet/Hoeffding	oui			oui		
cycles d'une permutation				oui	oui	
théorème de Steinhaus				oui		oui
Stirling			oui	oui		oui
Loi 0-1 de Kolmogorov	oui			oui		

Le plan de sauvetage pour les allergiques aux probas : Théorème du retour de Poincaré, ensembles sans-somme, marche sur $\mathbb{Z}$, TCL+application : en 4 développements, vous couvrez les 6 leçons. Pour avoir un peu de marge, rajouter Bernstein,LFGN L2.

Attention, ne pas oublier que le plan doit motiver les développements, pas l'inverse (oui, je radote). Ne pas présenter de développement faible en face d'un développement très classique (style TCL ou Bernstein).

2 Quelques commentaires sur les leçons

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

C'est la plus ancienne des leçons de probabilités de l'agrégation externe. Une leçon sans surprise, on trouve de nombreux plans sur Internet. Bien noter que les variables de Bernoulli ne sont pas supposées de même loi, ce qui ouvre la voie à des approximations poissoniennes (on peut penser aux inégalités de Le Cam ou à des convergences en loi de nombre de réussites dans une suite d'événements rares).

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Pas si facile de remplir cette leçon : une fois qu'on a donné les formules de calcul de l'espérance dans les cas des lois discrètes/à densité, calculé les premiers moments de quelques lois classiques, que reste-t'il à faire ? L'inégalité de Markov joue un rôle central. Il n'est pas interdit d'élargir vers des moments exponentiels, et de prolonger ainsi les liens entre l'existence de moments et la décroissance de la fonction de queue. Il semble difficile de ne pas parler de TCL et de loi des grands nombres, mais attention à ne pas déplacer le centre de gravité de la leçon et partir en hors-sujets. La valeur d'une leçon sur ce thème peut résider dans la richesse des exemples. Il me semble important de donner des exemples permettant d'illustrer l'importance de la linéarité de l'espérance, de la bilinéarité du moment d'ordre deux (ou de la variance), qui permettent d'effectuer des calculs sans expliciter la loi. On peut penser au théorème d'Erdös sur les ensembles sans-somme ([GK], exercice corrigé 50 page 179), ou au calcul des premiers moments de la loi hypergéométrique ([GK] page 170, attention coquille à la dernière ligne du calcul). L'exercice 17 page 185 de [GK] donne un bon exemple de loi pour laquelle l'espérance se calcule facilement à l'aide de la fonction de queue.

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

1. Les sommes de variables aléatoires indépendantes sont en effet un objet d'application tout à fait naturel des notions évoquées. Cela doit se retrouver dans le plan.

Le jour du concours, le chapitre 9 de [GK] peut servir de base. Même si ce n'est pas explicitement dans le titre de la leçon, il n'est pas interdit de parler de la fonction génératrice.

2. Le théorème central limite se prouve aisément avec les fonctions caractéristiques, via les théorèmes de Levy (chapitre 11 de [GK]). C'est donc très naturel de le mettre dans la leçon, mais il faut avoir à l'esprit que les théorèmes de Levy ne sont pas au programme de l'agrégation (à cause je pense des notions nécessaires pour le démontrer. Notons que dans [GK], les preuves sont reportées à la fin du chapitre 11). Peut être ne faut-il pas accorder trop d'importance à cette remarque, les jurys ignorant bien souvent eux-mêmes le programme.

3. Très souvent, les probabilistes font, comme M. Jourdain faisait de la prose, de la transformée de Laplace sans le savoir. Ils doivent savoir que si X et Y sont indépendantes $\mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}]$, mais souvent ils n'éprouvent pas besoin de considérer la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[e^{tX}]$. On peut présenter un joli théorème général, comme le théorème d'inversion (en exercice dans Barbe-Ledoux [BL], chapitre V) ou le théorème de Bernstein (voir [GK], page 226), mais c'est un choix personnel.

   Remarque : le théorème d'inversion me semble un peu anecdotique, en revanche que la transformée de Laplace caractérise la loi ne l'est pas, car cela permet des calculs de loi. Voir par exemple [GK], exercice corrigé 71 p 233. Je mettrais les 2 premières questions dans le plan, à titre d'exemple.

   Le seul moment où on a vraiment besoin de nommer cette fonction, c'est quand on fait des grandes déviations (cf chap 14 de [GK], mais attention à la grosse faute au 2. page 350 dans la preuve de la convexité de h. Voir l'erratum :
   `http://iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/livre/errata/erratum-350.pdf`
) Le théorème 14.3.3 (la preuve est juste!) est un développement possible, peut être un peu difficile. En tout cas il peut être dans le plan. L'inégalité (14.2) page 353 est appelée "inégalité de Chernov". Voir l'erratum (il ne s'agit là que d'une coquille) :
   `http://iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/livre/errata/erratum-353.pdf`

   Notons que les inégalités de Hoeffding (encore chap. 14) ont tout à fait leur place dans cette leçon.

Quels développements ?

Relire la première partie de la présente fiche.

Dans l'idéal, ce serait bien d'avoir un développement qui utilise Fourier, un autre Laplace

— transformée de Fourier

  La récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ a la préférence, et a l'avantage d'être recasable. Si on est plus aventureux, on peut se risquer à $\mathbb{Z}^d$. Le plus raisonnable, si on connait $\mathbb{Z}^d$, me semble être de faire Z et de laisser entendre que les idées s'étendent à $\mathbb{Z}^d$.

  On peut aussi penser à des choses tournant autour du TCL.

— transformée de Laplace

  On a essentiellement trois options :

  — Hoeffding (recasable) ou Hoeffding dans un cas particulier (cf la fiche Dirichlet)

  — identifications de lois par la transformée de Laplace (mais c'est léger)

  — inégalité de Chernoff (mais c'est léger)

  On peut éventuellement proposer un combiné des deux derniers ou démontrer la loi forte des grands nombres sous l'hypothèse de moments exponentiels grâce à Chernoff.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

C'est une leçon plutôt facile car le contenu est naturellement très riche. Il faut bien connaître les liens logiques entre les différents modes de convergence. Certains contre-exemples éclairant peuvent être réutilisés dans des leçons d'analyse, en particulier sur les espaces L^p. Par exemple, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $1/n$, (X_n) converge dans L^1 vers 0, mais pas presque sûrement. C'est beaucoup plus facile que les constructions d'analyse de bosse glissante. Bien sûr, il n'y a pas de miracle, puisque l'existence d'une suite de variables indépendantes n'est pas un résultat simple.

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Bien sûr, à densité est à sous-entendre “par rapport à la mesure de Lebesgue”, et il n'y a pas lieu de s'interdire de parler de vecteurs à densité.

Ce n'est pas une leçon très facile, car il n'y a pas tant de choses particulières aux variables à densité. On n'a pas à rougir de revenir à des généralités sur les variables aléatoires, mais attention au hors-sujet. Il y a des figures imposées :calcul d'espérance, formule de transfert, image d'une mesure à densité par un C^1 difféomorphisme. Ensuite, beaucoup de choix sont possibles, et la valeur de la leçon sera encores dans la richesse des exemples. On peut penser aux statistiques d'ordres et à Glivenko-Cantelli ([GK], pages 304-306), mais aussi à des problèmes de probabilités géométriques : la loi uniforme sur un compact est bien une loi à densité. Des exemples/méthodes de simulation de vecteurs ou variables aléatoires me semblent bienvenues.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Comme précemment, il ne faut pas s'interdire de parler de vecteur aléatoire ; on peut penser par exemple à la loi multinomiale ([GK], exercice corrigé 53 p. 180). C'est une leçon plutôt plus facile que la précédente, car il y a plus de raisonnements et d'outils spécifiques au cas discret. La notion de fonction génératrice trouve naturellement sa place dans cette leçon avec des applications modestes (calcul de loi) ou plus conséquentes : marche aléatoire ([GK]), Galton-Watson (voir le livre de Benaïm–El Karoui *Promenade Aléatoire*).

Annexe : détail des calculs de l'exercice des pièces

On a $D_n = \sum_{i=1}^n D_n^i \mathbb{1}_{\{X=i\}}$, avec

$$D_n^i = \sum_{(k,l)\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} M_{k,l} + M_{i,i} + |\sum_{k\neq i} M_{k,i} - \sum_{k\neq i} M_{i,k}|.$$

Les $M_{k,l}$ étant centrés, par linéarité, on a

$$\mathbb{E}(D_n^i) = \mathbb{E}\left(|\sum_{k\neq i} M_{k,i} - \sum_{k\neq i} M_{i,k}|\right) = \mathbb{E}\left(|\sum_{k\neq n} M_{k,n} - \sum_{k\neq n} M_{n,k}|\right).$$

Pour la dernière égalité, il suffit de remarquer que la loi d'une famille de variables indépendantes identiquement distribuées est invariante par permutation des coordonnées. Par linéarité et indépendance,

$$\mathbb{E}(D_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(D_n^i)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=i\}}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(D_n^i)/n,$$

et comme $\mathbb{E}(D_n^i)$ ne dépend pas de i, on a

$$\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}\left(|\sum_{k\neq n} M_{k,n} - \sum_{k\neq n} M_{n,k}| \right).$$

Remarque : on peut simplifier l'exercice en prenant X déterministe, $X = n$ par exemple. $\sum_{k\neq n} M_{k,n} - \sum_{k\neq n} M_{n,k}$ est la somme de $2(n-1)$ variables aléatoires indépendantes valant 1 avec probabilité $1/2$, -1 avec probabilité $1/2$:

$$\mathbb{E}(D_n) = \sqrt{2(n-1)}\mathbb{E}|\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{2(n-1)} X_k|,$$

ce qui donne, vu le raisonnement vu plus haut

$$\mathbb{E}(D_n) \sim \sqrt{2n}(\mathbb{E}|N|) = \sqrt{2n}.\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$