Université de Lorraine **année 2020-2021**

Agrégation de Mathématiques

Les développements de probas dans les leçons d'Analyse (et Probas !)

Je me base essentiellement sur la deuxième édition de notre livre Garet-Kurtzmann [GK]. Je rappelle que les exercices "non corrigés" ont des indications en fin de livre très utiles. [G] désigne mon livre ≪ Probabilités et Processus Stochastiques ≫.

La liste de leçons

— 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire (abandonnée en 2020).
— 261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
— 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
— 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
— 266 llustration de la notion d'indépendance en probabilités

Ces leçons reposent sur le même corpus scientifique : le contenu d'un enseignement de probas de L3 d'une bonne université. Il y a évidemment des intersections.

Comme on verra dans le tableau terminal, un nombre raisonnable de développements permet de couvrir les quatre leçons. Attention, le plan, qui n'est pas traité ici (se rapporter à vos leçons d'oral) est très important ! C'est le plan qui peut justifier le choix des développements, pas l'inverse. Il faut aussi se souvenir que beaucoup de mini-preuves, pas suffisantes pour former un développement peuvent (et doivent) se glisser dans le plan.

1 Commentaires sur quelques résultats pouvant servir de base de développements

— Théorème du retour de Poincaré ([GK], exercice corrigé 55 p. 104). Un très beau résultat de base de la théorie ergodique. Dans le livre, c'est écrit avec avec des intégrales, il convient ici de le réécrire avec des espérances. Si il reste du temps, on peut traiter un des exemples $\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$ (voir ci-dessous)

— Le résultat sur la convolution des lois Gamma ([GK], p.180) est l'exemple par excellence de calcul de densité d'une somme de variables indépendantes. C'est un grand classique des sujets d'examen de L3. C'est un résultat important, par exemple parce que les lois exponentielle et de χ^2 sont des lois gammas. La loi exponentielle se simulant aisément par inversion, ce résultat a des applications à la simulation de lois Gamma ou χ^2. Tout seul, c'est peut être un peu court, on peut le coupler avec la preuve de la formule de convolution ([GK], p. 180) Ce résultat ouvre également la porte à un algorithme de simulation de la loi de Poisson, qui est décrit dans l'exercice corrigé 155 p. 204.

— Loi de Dirichlet [GK] page 192. C'est un exercice (corrigé dans le cours) très riche, bon exemple d'application du théorème de C^1-difféomorphisme. Les questions 2 et 3 sont indépendantes, ce qui permet de développer 1+2 ou 1+3 suivant la leçon. Point culturel : les lois de Dirichlet apparaissent par exemple comme loi limite dans un schéma d'urne de Pòlya à plusieurs couleurs (voir [G])

— $\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$ ([GK], 131 page 197 et 129 page 196) : ce sont des petits calculs de lois à densité, sur le thème des transformations préservant la mesure, qui est la base de la théorie ergodique. On peut les lier au théorème du retour de Poincaré.

— Théorème d'Erdös sur les ensembles sans-somme ([GK], exercice corrigé 134 page 197). Très beau résultat qui illustre la méthode probabiliste (prouver l'existence d'objets à l'aide des probabilités). Comme il utilise $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il trouve aussi sa place dans certaines leçons d'algèbres.

— Volume de la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ([GK], exercice corrigé 146 page 200). Les lois Gamma au service du calcul du volume des boules. Permet de montrer sa maîtrise des techniques de calcul d'espérance, de loi image...

— Exponentielles et triangles ([GK], exercice corrigé 147 page 200). Un mélange sympathique de calculs de lois et de géométrie

— indicatrice d'Euler [GK], exercice corrigé 43 page 58. C'est un classique. Ce développement peut se recaser dans des leçons d'algèbre (en particulier celle de dénombrement).

— Loi Zeta, indépendance [GK], exercice 115 page 156 (exercice non corrigé).

  Exercice original, qui permet de montrer qu'on sait prouver l'indépendance d'une famille infinie de variables aléatoires.

  ou, sur le même thème, plus facile : [GK], exercice corrigé 41 page 56. On donne une preuve probabiliste du développement eulérien de la fonction ζ, on en déduit (entre autres) la divergence de la série des inverses des nombres premiers. Pourquoi pas pimenter avec ça une leçon sur les séries ?

Les lois Zêta ont leur importance en théorie des nombres, car elles sont liées à la densité de Dirichlet (voir [GK] p. 59-60, ainsi que l'article "Les lois Zêta pour l'arithmétique, paru dans le numéro 96 du magazine *Quadrature*)

— polynômes de Bernstein [GK], page 195

C'est un classique. Peut se recaser dans des leçons d'analyse. Une phrase d'accroche possible pour lancer le développement : « Si S_n^x est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$, la loi faible (ou la loi forte) des grands nombres entraîne que S_n^x/n converge en loi vers x, c'est à dire que pour toute fonction continue sur $[0,1]$, $\mathbb{E}(f(S_n^x/n)$ converge vers $f(x)$. On va montrer, d'une part que $\mathbb{E}(f(S_n^x/n)$ est un polynôme en x (le polynôme de Bernstein), d'autre part que cette convergence est uniforme, en s'inspirant de la preuve de la loi des grands nombres L^2. Cela permet de redémontrer le théorème de Weierstrass. »

— inégalité de Le Cam : [GK], 175 page 208 (exercice non corrigé). Jolie preuve, pas très difficile. C'est très lié au couplage. Si on le propose, c'est une bonne idée de glisser des idées sur le couplage ailleurs dans le développement

— récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: [GK],page 254-256. Très bon développement. On peut le présenter à plusieurs niveaux. La manière la plus commune pour montrer la divergence de la série est d'utiliser Stirling (ou Wallis). Mais on peut également utiliser le lien avec la fonction caractéristique en suivant l'exercice corrigé 207 page 261. Sous cette forme, on peut l'introduire dans une leçon sur les séries de Fourier.

— critères de transience/récurrence des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$: [GK],page 256-260.

C'est un peu la suite du développement précédent. Je suggère d'admettre le critère de récurrence/transience avec la somme de la série, ainsi que l'expression intégrale de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ qui doit être donnée dans le plan.

On peut aussi regarder le livre de Benaïm–El Karoui *Promenade Aléatoire*, qui traitent directement le cas de la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}^d$ et tirent partie du fait que la fonction caractéristique de S_{2n} est réelle positive.

— loi forte des grands nombres avec un moment d'ordre 2 : [GK], page

275-276. Très bon développement, qui sans être très difficile, présente beaucoup d'idées importantes.

— nombres normaux : [GK], page 287 (exercice corrigé 228).
Développement un peu difficile, mais sans doute recasable dans des leçons d'analyse. On n'est pas obligé de présenter l'exercice jusqu'au bout : montrer que la suite des chiffres est iid est suffisant pour étudier la fréquence des chiffres avec la loi forte des grands nombres.

— existence de variables indépendantes : [GK], page 288 (exercice corrigé 229)
Pas très dur, attention toutefois à ne pas dire de bêtises sur la fonction de répartition inverse

— valeurs d'adhérence de binomiales : [GK], page 289 (exercice corrigé 231)
Bon développement original, avec un énoncé saisissant, et une preuve pas trop dure. Remarquer l'analogie avec la preuve de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

— preuve du TCL en dimension 1 : [GK], page 307-308.
Classique. Tout seul, c'est à mon avis un peu juste, à compléter avec une application. Je propose : [GK], exercice corrigé 257 p. 316.

— Événements rares : [GK], exercice corrigé 294 p. 390
Le point clef, est, comme dans la preuve du TCL, que pour des nombres complexes de module inférieur ou égal à un, la différence du produit est plus petite que la somme des différences. Évoquer la proximité de ces deux preuves est une bonne idée.

— Convergence de la série de Dirichlet : $\sum_{n\geq 1} \pm\frac{1}{n^x}$ pour $x > 1/2$ avec des signes aléatoires (voir [G], chapitre 0)
Peut se recaser dans des leçons d'analyse. Bien sûr, si on admet l'inégalité de Hoeffding, c'est trop court. Il faut la démontrer dans le cas général ou dans ce cas particulier.

— Nombre de cycles d'une permutation : [GK], exercice corrigé 292 page 389.
Si C_n est le nombre de cycles d'une permutation choisie suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, alors $\frac{C_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
Développement original, peut se recaser dans des leçons d'algèbre. Dans une leçon de probas, on pourra laisser de côté la question 3, qui aura en revanche toute sa place dans la leçon sur le dénombrement.

— Théorème de Steinhaus sur l'ensemble de coupure d'une série trigonométrique aléatoire : [GK], page 390 (exercice corrigé 293)
Développement original et difficile, peut se recaser dans des leçons

d'analyse.

— Preuve probabiliste de la formule de Stirling (à partir du TCL) : [GK], page 314 (exercice corrigé 251)
  C'est un classique de l'agreg, apparu d'abord je pense dans Foata–Fuchs. J'hésiterais à l'introduire dans une leçon d'analyse dont le titre ne mentionne pas explicitement les probabilités, car Stirling peut se prouver de manière très efficace avec la méthode de Laplace, qui n'est pas complètement étrangère à cette preuve.
— Loi 0–1 de Kolmogorov et applications aux séries de variables i.i.d. : [GK], pages 129,158, 375.
— Convergence vers la loi Zêta [GK], exercice corrigé 258.

Tableau synoptique

Depuis la session 2019, il n'y a plus que quatre leçons de probabilités, ce qui permet de couvrir les 4 leçons avec peu de développements. C'est encore plus simple pour la session 2021, puisqu'il est beaucoup plus facile de trouver des développements pour la leçon 266 que pour la leçon 260. Le développement sur les événements rares (convergence vers la loi de Poisson) peut être présenté dans toutes les leçons de probabilités de la session 2021. C'est aussi le cas de l'exercice sur les cycles d'une permutation aléatoire, qu'on peut mettre aussi dans des leçons d'algèbre. Toutefois, ce développement est plus difficile.

Attention, ne pas oublier que le plan doit motiver les développements, pas l'inverse (oui, je radote). Ne pas présenter de développement faible en face d'un développement très classique (style TCL ou Bernstein). J'ai mis les oui en orange quand la justification de l'introduction du développement dans le plan demande un peu d'attention.

	esp/mom	Loi	conv.	discret	indep.
Théorème du retour	oui	oui	oui		
Convolution des lois gamma	oui				oui
Loi de Dirichlet	oui	oui			
$\{1/x\}$, $\lfloor x+\alpha \rfloor$		oui			
Sans-somme	oui			oui	
Volume de la boule unité	oui	oui			oui
Exponentielles et triangles	oui				
Indicatrice d'Euler				oui	
Loi Zeta				oui	oui
Polynomes de Bernstein	oui		oui	oui	oui
Inégalités de Le Cam				oui	oui
marche sur $\mathbb{Z}$		oui		oui	oui
marche sur $\mathbb{Z}^d$		oui		oui	oui
LFGN L2	oui		oui		oui
nombres normaux			oui		oui
existence de vaiid		oui	oui		oui
val. adh. de binomiales			oui	oui	oui
TCL + application		oui	oui		oui
Evénements rares		oui	oui	oui	oui
série Dirichlet/Hoeffding			oui		oui
cycles d'une permutation		oui	oui	oui	oui
théorème de Steinhaus			oui		oui
Stirling			oui		
Loi 0-1 de Kolmogorov			oui		oui
Convergence vers la loi Zêta		oui	oui	oui	

2 Quelques commentaires sur les leçons

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Ce que dit le jury (rapport 2019)

Cette leçon ne sera pas utilisée pour la session 2020 ; les notions qui s'y rapportent peuvent être exploitées dans les leçons 261, 262, 264, 266.

Les candidats doivent connaître la définition des moments centrés et les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les connaissances sur les variables aléatoires à densité sont parfois fragiles. Le candidat doit pouvoir citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments est importante ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Ce que dit le jury (rapport 2018)

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les variables aléatoires à densité sont trop souvent négligées. Le candidat peut citer – mais doit surtout savoir retrouver rapidement – les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique. Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Ce que j'en disais (avant la publication du rapport)

Pas si facile de remplir cette leçon : une fois qu'on a donné les formules de calcul de l'espérance dans les cas des lois discrètes/à densité, calculé les premiers moments de quelques lois classiques, que reste-t-il à faire ? L'inégalité de Markov joue un rôle central. Il n'est pas interdit d'élargir vers des moments exponentiels, et de prolonger ainsi les liens entre l'existence de moments et la décroissance de la fonction de queue. Il semble difficile de ne pas parler de TCL et de loi des grands nombres, mais attention à ne pas déplacer le centre de gravité de la leçon et partir en hors-sujets. La valeur d'une leçon sur ce thème peut résider dans la richesse des exemples. Il me semble important de donner des exemples permettant d'illustrer l'importance de la linéarité de l'espérance, de la bilinéarité du moment d'ordre deux (ou de la variance), qui permettent d'effectuer des calculs sans expliciter la loi. On peut penser au théorème d'Erdös sur les ensembles sans-somme ([GK], exercice corrigé 134 page 197), ou au calcul des premiers moments de la loi hypergéométrique ([GK] page 188). L'exercice 173 page 208 de [GK] donne un bon exemple de loi pour laquelle l'espérance se calcule facilement à l'aide de la fonction de queue.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon remplace l'ancienne leçon ≪ 261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications. ≫

Ce que dit le jury (rapport 2018 et 2019)

Rapport 2018 : Cette évolution est motivée d'une part par la suspension pour 2019 de la leçon 263 sur les variables aléatoires à densité et d'autre part afin d'élargir le champ de cette leçon, les candidats ayant tendance à restreindre leur étude à la définition de la fonction caractéristique et à des exemples pour les lois usuelles.

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la définition de la loi d'une variable aléatoire. On distinguera bien la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω de la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur l'ensemble des valeurs de X par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $\mathbb{E}(f(X))$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on pourra s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $\mathbb{E}(f(X))$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de X. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction caractéristique, fonction de répartition, mais aussi fonction génératrice, moments ou densité lorsque c'est pertinent). Les propriétés principales de ces objets doivent être connues (comportement d'une fonction de répartition, d'une fonction caractéristique, lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments, comportement en 1 de la fonction génératrice, etc). Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite. Une telle leçon devra aussi s'enrichir de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de X, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \cdots + X_n$,...

Mes commentaires

La nouvelle leçon est un peu plus difficile, avec un objectif assez différent. La précédente version était centrée sur des objets fonctionnels dont on donnait des applications aux probabilités ; ici on part de la notion de loi et c'est de là qu'est motivée l'introduction d'un certain nombre d'objets. La question « Comment calculer une loi »est ainsi posée ; en particulier il faudra d'abord montrer sa compréhension de la notion de loi et en particulier de la notion de loi image. On peut aussi penser à faire ressortir ce qui induit le choix de l'outil caractérisant, en fonction des valeurs prises par les variables (réelles, vectorielles, positives, entières) et des opérations que l'on veut faire dessus (somme, produit,maximum,composition). On peut enfin remarquer qu'il y a parfois grand intérêt, pour l'étude d'une loi, de la représentant comme loi image d'une autre loi (éventuellement vectorielle) par une certaine transformation.

262 Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

L'ancienne formulation du titre était « Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. »

Ce que dit le jury (rapports 2018 et 2019 sont presque identiques)

Rapport 2018 : Pour la session 2019, le titre de cette leçon évolue afin de donner un rôle plus important aux théorèmes limites. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Rapport 2019 : Les théorèmes limite sont au cœur de cette leçon. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites.

Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés et il faut au moins en connaître l'architecture des preuves.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...).

Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de Markov. Toujours pour les candidats les plus solides, on peut aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables ou encore les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

Ce que j'écrivais

C'est une leçon plutôt facile car le contenu est naturellement très riche. Il faut bien connaître les liens logiques entre les différents modes de convergence. Certains contre-exemples éclairants peuvent être réutilisés dans des leçons d'analyse, en particulier sur les espaces L^p. Par exemple, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $1/n$, (X_n) converge dans L^1 vers 0, mais pas presque sûrement. C'est beaucoup plus facile que les constructions d'analyse de bosse glissante. Bien sûr, il n'y a pas de miracle, puisque l'existence d'une suite de variables indépendantes n'est pas un résultat simple.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Ce que dit le jury (rapports 2018 et 2019)

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice. Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

Ce que j'écrivais

Comme précemment, il ne faut pas s'interdire de parler de vecteur aléatoire ; on peut penser par exemple à la loi multinomiale ([GK], exercice corrigé 137 p. 198). Passé les généralités, il faut insister sur les raisonnements et d'outils spécifiques au cas discret. La notion de fonction génératrice trouve naturellement sa place dans cette leçon avec des applications modestes (calcul de loi) ou plus conséquentes : marche aléatoire ([GK]), Galton-Watson (voir [G] ou le livre de Benaïm–El Karoui *Promenade Aléatoire*).

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Ce que dit le jury (rapport 2019)

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. La motivation de cette leçon est de présenter cette notion de façon cohérente et de l'illustrer par des énoncés fondamentaux et des modèles importants.

À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples et des énoncés simples (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle, indépendance et opérations ensemblistes, etc). Il est important de pouvoir présenter un espace de probabilité sur lequel sont définies n variables aléatoires indépendantes, au moins à un niveau élémentaire pour des variables discrètes ou à densité.

De façon plus sophistiquée, on peut envisager de donner une construction d'un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois prescrites.

Au delà des définitions, il est nécessaire de décliner quelques propriétés simples de l'indépendance, notamment celles en lien avec l'espérance et, plus spécifiquement, les notions de variance et de covariance, ce qui peut s'illustrer par exemple par l'obtention de lois faibles des grands nombres. Une autre illustration possible consiste en la représentation des variables usuelles (binomiales, géométriques, hypergéométriques ...) à l'aide d'expériences indépendantes élémentaires. Grâce aux divers critères utilisant les fonctions ou transformées caractérisant les lois (densité, fonction génératrice, fonction de répartition à n variables, fonction caractéristique, etc) il est possible de présenter les propriétés d'indépendance remarquables dont jouissent les lois usuelles (lois de Poisson, lois normales, lois exponentielles, lois de Cauchy ou, pour aller plus loin, par exemple, la traduction de l'indépendance des vecteurs gaussiens en termes d'algèbre bilinéaire).

Les réciproques du lemme de Borel-Cantelli et la loi du 0–1 de Kolmogorov, plus sophistiquée, tiennent une place de choix dans cette leçon ; elles permettent notamment d'obtenir des convergences presque sûres. De manière générale, il est important d'illustrer cette leçon par des exemples tels que l'étude des records ou les propriétés du minimum de variables exponentielles indépendantes ou bien les statistiques d'ordre, ou encore le principe du « singe tapant à la machine », etc.

Enfin, la promenade aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est une riche source d'exemples.