

Université de Lorraine

Agrégation de Mathématiques

Calculs d'intégrales

Le chapitre “Intégrales” de notre livre Garet–Kurtzmann<sup>1</sup> contient beaucoup d'exemples des méthodes de calcul d'intégrales. On en trouve aussi dans le chapitre 9. Faisons ici une petite liste, non exhaustive :

## 1 Techniques de base

### 1.1 En dimension 1 : Calcul par primitive

Voir par exemple ex. 61 p. 105

### 1.2 En dimension 1 : Intégration par parties

1. Intégrale de Wallis ex. 58 p. 105
2. Identité  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  p. 81 ou ex. 68 p. 108
3. Formule  $\Gamma'(1) = -\gamma$ , p. 75-79

### 1.3 En dimension $d$ : le théorème de Fubini

1. Intégration des fonctions radiales, p. 98 ; application à des calculs de volume. Voir aussi ex. 66 p. 107 calcul d'une intégrale sur un ellipsoïde
2. calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  : ex. 62 p. 106

### 1.4 Changement de variable (en dimension 1 ou $d$ )

1. La fonction  $\beta$ , p. 95
2. Le changement de variable polaire et l'intégrale de Gauss, p. 97
3. ex. 66 p. 107 calcul d'une intégrale sur un ellipsoïde
4. Calculs de centre de gravité : ex. 71 p. 109. Voir aussi ex. 72 p 110 : théorème de Guldin

---

1. On fait ici référence à la 2<sup>ème</sup> édition.

## 2 Expression à l'aide d'une série

1. Pour des fonctions continues par morceaux : ex 53 p. 104 : calcul de  $\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx$ .
2. Par un développement en série :
  - ex. NC 83 p. 113 :  $\int_0^1 \frac{\log t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}$ .
  - ex 68 p. 108. : calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne.

## 3 Introduction d'un paramètre réel ou complexe

1. Introduire un paramètre réel et calculer la dérivée : calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$ , ex. 96 p. 116, question 3) (NC), calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  ex. 65 p. 107
2. Grâce à la continuité de la transformée de Laplace (ex. 54 p. 104), en particulier lorsque l'intégrale est semi-convergente : voir ex. 65 p. 107 et éventuellement ex 95. p 115 (NC).
3. Avec une équation différentielle : ex 63. p. 106 : calcul de  $\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1} du$ , avec  $0 < \alpha < 1$ .  
Voir aussi, pour le calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne, chap. 9. p 249.
4. Introduire un paramètre réel (ou complexifier un paramètre existant) et utiliser le principe des zéros isolés et les théorèmes d'holomorphic pour calculer pour des valeurs intéressantes du paramètre : calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne, chap. 9. p 248.

## 4 Calcul des résidus

- Calcul de la transformée de Fourier de la loi de Cauchy, chap. 9 p. 249–250
- Formule des compléments, chap 6, ex 150 p. 202

## 5 Avec le théorème d'inversion de Fourier

calcul de la transformée de Fourier de la loi de Cauchy, chap 9, p. 251

Attention : cette liste ne prétend pas dire tout ce qu'on peut dire sur le calcul d'intégrale. En particulier, on peut sans doute dire plus sur le calcul de primitives et trouver des exemples plus jolis pour appliquer le théorème des résidus. Il n'est pas non plus nécessaire de tout mettre !